

ПОЛЯ, ВАКУУМ И ЗЕРКАЛЬНАЯ ВСЕЛЕННАЯ

Перевод с 3-го, переработанного
английского издания

Л. Борисова и Д. Рабунский



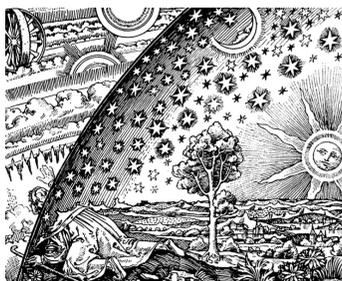
Поля, вакуум и зеркальная Вселенная

Поля и частицы
в пространстве-времени
общей теории относительности

Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский

Переведено на русский язык
с 3-го, переработанного
английского издания 2023 г.

Первое англ. издание опубликовано в 2001 г.
Французский перевод издан в 2010 г.



New Scientific Frontiers
London, 2023

Аннотация: — В книге построена теория негеодезического движения частиц в пространстве-времени общей теории относительности. Движение заряженных частиц в электромагнитном поле рассмотрено в искривлённом пространстве-времени (в противоположность к обычной релятивистской электродинамике, построенной в пространстве-времени специальной теории относительности). Теория движения частиц со спином построена на основе вариационного принципа: этот подход показывает, что все элементарные частицы со спином связаны особым квантовым соотношением. Физический вакуум и силы ньютоновской гравитации, действующие в нём, определены через лямбда-член в уравнениях Эйнштейна. Предложена космологическая концепция инверсионного взрыва Вселенной из компактного объекта, радиус которого равен классическому радиусу электрона. Рассмотрены физические условия внутри мембраны, разделяющей области пространства-времени, в которых время течёт в будущее и в прошлое (наш мир и зеркальная Вселенная).

© Л. Б. Борисова и Д. Д. Рабунский 1999, 2001, 2009, 2010, 2023

Соглашение об авторском праве: — Все права защищены. Эта книга опубликована и распространяется в соответствии с “Будапештской инициативой открытого доступа”. Это означает, что электронное копирование, печать и распространение этой книги для некоммерческого, академического или индивидуального использования может осуществляться любым пользователем без разрешения и без оплаты. Любая часть этой книги, цитируемая или используемая каким-либо образом в других публикациях, должна содержать ссылку на эту публикацию. Никакая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме (включая хранение на любом носителе) для коммерческого использования без предварительного разрешения владельца авторских прав. Запросы на разрешение воспроизведения любой части этой книги для коммерческого использования должны быть адресованы Авторам. Авторы сохраняют за собой право использовать эту книгу целиком или её часть в любых других публикациях и любым способом, который они сочтут нужным. Настоящее Соглашение об авторском праве остаётся в силе, даже если Авторы передадут авторские права на эту книгу другому лицу. Настоящим Авторы ограждают Издателя от любых претензий или обязательств, касающихся авторства, публикации или распространения этой книги.

Эта книга была набрана и сверстана с использованием настольной издательской системы L^AT_EX.

New Scientific Frontiers — издательство, зарегистрированное в Nielsen Book Services Ltd., Уокинг, графство Суррей, Великобритания.

ISBN: 978-1-7392930-4-8

Опубликовано в Великобритании.

Содержание

Предисловие	6
Глава 1 Введение	
1.1 Геодезическое движение частиц	8
1.2 Физически наблюдаемые величины	14
1.3 Динамические уравнения движения свободных частиц ..	24
1.4 Негеодезическое движение частиц. Постановка задачи ..	31
Глава 2 Основы тензорной алгебры и анализа	
2.1 Тензоры и тензорная алгебра	36
2.2 Скалярное произведение векторов	42
2.3 Векторное произведение векторов. Антисимметричные тензоры и псевдотензоры	45
2.4 Абсолютный дифференциал и производная по направ- лению	52
2.5 Абсолютная дивергенция и ротор	55
2.6 Операторы Лапласа и Даламбера	64
2.7 Заключение	68
Глава 3 Заряженная частица в псевдоримановом пространстве	
3.1 Постановка задачи	70
3.2 Наблюдаемые компоненты тензора электромагнитного поля. Инварианты поля	72
3.3 Хронометрически инвариантные уравнения Максвелла. Закон сохранения электрического заряда. Условие Ло- рентца	78
3.4 Четырёхмерные уравнения Даламбера для электромаг- нитного потенциала и их наблюдаемые компоненты	85
3.5 Хронометрически инвариантная сила Лоренца. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля	91

3.6	Вывод уравнений движения заряженной частицы методом параллельного переноса	99
3.7	Уравнения движения заряженной частицы, следующие из принципа наименьшего действия как частный случай полученных уравнений движения	106
3.8	Геометрическая структура четырёхмерного потенциала электромагнитного поля	109
3.9	Уравнения Минковского как частный случай полученных уравнений движения	115
3.10	Структура псевдориманова пространства со стационарным электромагнитным полем	118
3.11	Движение заряженной частицы в стационарном электрическом поле	121
3.12	Движение заряженной частицы в стационарном магнитном поле	134
	3.12.1 Магнитное поле сонаправлено с полем неголономности пространства	138
	3.12.2 Магнитное поле ортогонально полю неголономности пространства	148
3.13	Движение заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле	152
	3.13.1 Магнитное поле ортогонально к электрическому и параллельно полю неголономности пространства	156
	3.13.2 Магнитное поле параллельно электрическому и ортогонально полю неголономности пространства	159
3.14	Заключение	163
Глава 4 Частица со спином в псевдоримановом пространстве		
4.1	Постановка задачи	165
4.2	Спин-импульс частицы в уравнениях движения	171
4.3	Уравнения движения частицы со спином	176
4.4	Физические условия спин-взаимодействия	185
4.5	Движение элементарных частиц со спином	189
4.6	Частица со спином в электромагнитном поле	199
4.7	Частица со спином в стационарном магнитном поле	205
	4.7.1 Магнитное поле сонаправлено с полем неголономности пространства	208

4.7.2	Магнитное поле ортогонально полю неголономности пространства	214
4.8	Закон квантования масс элементарных частиц	218
4.9	Комптоновская длина волны	223
4.10	Безмассовая частица со спином	224
4.11	Заключение	233
Глава 5 Физический вакуум		
5.1	Введение	235
5.2	Наблюдаемая плотность вакуума. Неньютоновская гравитация. Т-классификация материи	245
5.3	Физические свойства вакуума. Космология	248
5.4	Концепция инверсионного взрыва Вселенной	257
5.5	Неньютоновские гравитационные силы	261
5.6	Гравитационный коллапс	264
5.7	Инфляционный коллапс	270
5.8	Заключение	273
Глава 6 Зеркальная Вселенная		
6.1	Концепция зеркальной Вселенной	276
6.2	Условия перехода через мембрану между нашим миром и зеркальной Вселенной	287
6.3	Заключение	290
Литература		292
Предметный указатель		297

Предисловие

Это — книга, написанная в 1999 году физиками-теоретиками Ларисой Борисовой и Дмитрием Рабунским.

Книга предлагает новое теоретическое исследование, развивающее теорию физических наблюдаемых в общей теории относительности. В своей знаменитой книге *Теория поля* Лев Ландау и Евгений Лифшиц подробно описали движение частиц в электромагнитном и гравитационном полях. Однако в 1930-е годы методы общековариантного анализа ещё не учитывали понятий о физически наблюдаемых величинах (хронометрических инвариантах). Поэтому авторы распространили математический аппарат хронометрических инвариантов на существующую физическую теорию, применив его к движению частиц в электромагнитном и гравитационном полях. Кроме того, Ландау и Лифшиц не рассматривали движение частицы с внутренним вращательным моментом (спином). Поэтому отдельная глава в этой книге посвящена движению частиц со спином. В двух других главах авторы вводят теорию физического вакуума и теорию зеркальной Вселенной. Авторы также включили главу с изложением элементов тензорной алгебры и анализа в терминах хронометрических инвариантов. Всё это делает данную книгу современным дополнением к *Теории поля*.

Париж, 17 июня 2010

В 3-м издании авторы добавили список хронометрически инвариантных производных, а также ссылки на свои недавние публикации. Мы также исправили опечатки, обнаруженные в предыдущих изданиях.

Калé, 10 января 2023

Патрик Маркé

Благодарности

Во-первых, мы хотели бы выразить искреннюю благодарность нашим учителям общей теории относительности в Москве: Абраму Леонидовичу Зельманову (1913–1987) и Кириллу Петровичу Станюковичу (1916–1989). Многолетнее дружеское знакомство, личное обучение и бессчётные часы научных бесед с ними посеяли семена фундаментальных идей, которые к настоящему времени проросли в нашем сознании и отражены на этих страницах. Мы также очень благодарны Кириллу Ивановичу Домбровскому (1913–1997), математику, чьи дружеские беседы и дискуссии с нами оказали большое влияние на наши научные взгляды.

Всю подготовку текста первого английского издания этой книги в 2001 г. взял на себя Григорий Викторович Семёнов (Москва, Россия), которому мы очень признательны.

Мы также благодарим Эбенезера Чифа (Дуце, Нигерия) за его помощь в подготовке 2-го издания книги в 2009 г.

Мы также хотели бы выразить нашу искреннюю благодарность Патрику Маркэ (Калé, Франция). Его инициатива перевести наши книги на французский язык открыла двери для наших книг в мир франкофонии.

Мы также очень признательны Пьеру А. Миллету (Оттава, Канада), который посвятил своё время тщательному редактированию английского и французского изданий 2023 г.

Наша особая благодарность Анатолию Васильевичу Белякову (Тверская Карелия, Россия), который перевёл все наши книги с английского на русский язык.

Эта книга была написана в 1999 г. В 3-м английском издании, с которого Беляков сделал этот русский перевод, мы полностью переработали весь текст книги и внесли много исправлений.

1.1 Геодезическое движение частиц

Многочисленные эксперименты по проверке выводов общей теории относительности прямо свидетельствуют о том, что её базовое пространство-время (четырёхмерное псевдориманово пространство) является основой геометрии нашего реального мира. Это означает также, что даже по мере развития экспериментальной физики и астрономии, когда обнаружатся новые пространственно-временные эффекты, необъяснимые в рамках существующей теории, четырёхмерное псевдориманово пространство будет основой для дальнейшего расширения базовой геометрии общей теории относительности и войдёт в неё как частный случай. Поэтому, при построении математической теории движения частиц, мы рассматриваем их движение именно в четырёхмерном псевдоримановом пространстве.

Здесь необходимо сделать одно замечание, касающееся терминологии. Вообще базовое пространство-время общей теории относительности — это *риманово пространство** четырёх измерений со знакопеременной сигнатурой Минковского (+---) или (-+++). Последнее означает (3+1)-разбиение координатных осей риманова пространства на три пространственные координатные оси и ось времени. Из соображений удобства в расчётах наиболее часто рассматривают риманово пространство с сигнатурой (+---), когда время является вещественным, а пространство мнимым. В некоторых теориях, в основном в специальной теории относительности,

*Метрическое пространство, геометрия которого определяется метрикой Римана $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$. Бернхард Риман (1826–1866), немецкий математик, основоположник римановой геометрии (1854).

используют также сигнатуру $(-+++)$, когда время мнимое, а пространство вещественное. Но сигнатура римановых пространств может быть и знакопостоянной, например $(++++)$. Поэтому риманово пространство со знакопеременной сигнатурой обычно называют *псевдоримановым пространством*, чтобы подчеркнуть разбиение координатных осей на два типа. Однако при этом его геометрические свойства всё равно относятся к свойствам римановой геометрии и приставка “псевдо” с математической точки зрения не совсем корректна. Тем не менее мы будем использовать это обозначение как устоявшееся и привычное пониманию.

Итак, рассмотрим движение частиц в четырёхмерном псевдоримановом пространстве. Если на частицу действует только гравитационная сила, то она находится в свободном падении, двигаясь по кратчайшей (*геодезической*) траектории. Такое движение частицы называют *свободным*, или *геодезическим движением*. Если же на частицу действуют какие-то дополнительные силы негравитационной природы, то они отклоняют её от геодезической траектории и движение частиц становится *негеодезическим*.

С геометрической точки зрения движение частицы в четырёхмерном псевдоримановом пространстве есть параллельный перенос некоторого четырёхмерного вектора Q^α , характеризующего движение этой частицы и, поэтому, касательного к траектории движения в каждой её точке. Соответственно, уравнения движения частицы являются уравнениями параллельного переноса вектора Q^α вдоль её четырёхмерной траектории и представляют собой выражения абсолютной производной данного вектора по некоторому параметру ρ , который имеет место вдоль всей траектории движения частицы и на этом протяжении не равен нулю

$$\frac{DQ^\alpha}{d\rho} = \frac{dQ^\alpha}{d\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha Q^\mu \frac{dx^\nu}{d\rho}, \quad \alpha, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Здесь $DQ^\alpha = dQ^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha Q^\mu dx^\nu$ абсолютный дифференциал (абсолютное приращение) вектора Q^α , отличающийся от обычного дифференциала dQ^α наличием символов Кристоффеля 2-го рода $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ (коэффициентов связности риманова пространства)*, которые

* Коэффициенты связности риманова пространства (символы Кристоффеля) названы по имени Эльвина Бруно Кристоффеля (1829-1900), немецкого матема-

вычисляются через символы Кристоффеля (коэффициенты связности) 1-го рода $\Gamma_{\mu\nu,\rho}$ и являются функциями первых производных фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = g^{\alpha\rho} \Gamma_{\mu\nu,\rho}, \quad \Gamma_{\mu\nu,\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right). \quad (1.2)$$

При движении вдоль геодезической траектории (свободное движение) параллельный перенос осуществляется методом, который предложил Леви-Чивита*. В этом случае абсолютная производная четырёхмерного вектора частицы равна нулю

$$\frac{dQ^{\alpha}}{d\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} Q^{\mu} \frac{dx^{\nu}}{d\rho} = 0, \quad (1.3)$$

а квадрат переносимого вектора сохраняется вдоль всей траектории $Q_{\alpha} Q^{\alpha} = const$. Такие уравнения называются уравнениями движения свободных частиц.

В рамках кинематики движение частицы характеризуется четырёхмерным вектором скорости (иначе именуемым *кинематическим вектором*)

$$Q^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\rho}, \quad (1.4)$$

при параллельном переносе которого в смысле Леви-Чивиты получаются уравнения четырёхмерных траекторий свободной частицы (*уравнения геодезических линий*)

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\rho^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\rho} \frac{dx^{\nu}}{d\rho} = 0. \quad (1.5)$$

Необходимость условия $\rho \neq 0$ вдоль траектории движения приводит к тому, что параметр дифференцирования ρ оказывается разным вдоль траекторий различного типа. В псевдоримановом пространстве принципиально возможны три типа траекторий, каждому из которых соответствует свой тип частиц:

тика, который вывел их в 1869 году. В пространстве-времени специальной теории относительности (пространство Минковского) всегда можно задать инерциальную систему отсчёта, в которой матрица фундаментального метрического тензора принимает вид диагональной единичной матрицы и все символы Кристоффеля обращаются в нуль.

*Туллио Леви-Чивита (1873–1941) — итальянский математик, впервые рассмотревший такой параллельный перенос [1].

- 1) *неизотропные вещественные траектории*, лежащие “внутри” светового конуса. Вдоль таких траекторий квадрат пространственно-временного интервала $ds^2 > 0$, а сам интервал ds является вещественным. Это траектории движения досветовых частиц с ненулевой массой покоя и вещественной релятивистской массой;
- 2) *неизотропные мнимые траектории*, лежащие “снаружи” светового конуса. Вдоль траекторий такого типа $ds^2 < 0$, а сам интервал ds является мнимым. Это траектории движения сверхсветовых частиц — тахионов*, релятивистская масса которых является мнимой;
- 3) *изотропные траектории*, лежащие собственно на световом конусе и представляющие собой траектории частиц с нулевой массой покоя (безмассовые светоподобные частицы), движущихся со скоростью света. Вдоль изотропных траекторий $ds^2 = 0$, но не равен нулю трёхмерный интервал.

В качестве параметра дифференцирования вдоль неизотропных траекторий обычно используют пространственно-временной интервал ds . Однако, вдоль траекторий безмассовых частиц $ds = 0$ и его нельзя использовать как параметр дифференцирования. Поэтому в 1944 году А. Л. Зельманов предложил использовать в качестве параметра дифференцирования вдоль изотропных траекторий другую величину, не равную нулю вдоль изотропных траекторий

$$d\sigma^2 = \left(-g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}} \right) dx^i dx^k, \quad (1.6)$$

которая представляет собой трёхмерный (пространственный) физически наблюдаемый интервал [9]. Независимо от Зельманова, к такому же выводу пришли Ландау и Лифшиц (см. §84 в их фундаментальной книге *Теория поля* [10]).

*Тахионы (tachyons) — сверхсветовые частицы. Возможность их существования, а также возможность сверхсветовых сигналов в рамках специальной теории относительности была впервые рассмотрена в 1958 году Фрэнком Тангерлини в его диссертации [2]. Большинство исследований по истории тахионов не упоминают этот факт, но подробные обзоры на ту тему, такие как [3, 4], ссылаются на Тангерлини. О тахионах впервые заявил Терлецкий, в его краткой статье 1960 г. [5], затем Биланюк, Дешпанд и Сударшан в более детальной статье 1962 г. [6]. Термин “тахионы” был впервые использован позднее, в 1967 году Фейнбергом [7]. См. подробности в обзоре Г. Б. Малыкина и Э. Г. Малыкина [8].

Подставляя в обобщённые уравнения геодезических (1.5) соответствующие параметры дифференцирования, получаем уравнения неизотропных геодезических линий (траектории массовых частиц)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (1.7)$$

а также уравнения изотропных геодезических линий (траектории распространения света)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\sigma^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\sigma} \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0. \quad (1.8)$$

Однако, чтобы получить полную картину движения частицы, нам необходимо построить динамические уравнения движения, содержащие в себе физические характеристики движения частицы (массу, частоту и т.п.). Геометрически динамические уравнения движения представляют собой уравнения параллельного переноса четырёхмерного динамического вектора частицы вдоль её траектории (равенство нулю абсолютной производной динамического вектора по параметру, не равного нулю вдоль траектории).

Движение свободных массовых частиц (неизотропные геодезические траектории) характеризуется четырёхмерным вектором импульса

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (1.9)$$

где m_0 масса покоя частицы. При параллельном переносе в смысле Леви-Чивиты четырёхмерного вектора импульса P^α получаются динамические уравнения движения свободных массовых частиц

$$\frac{dP^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha P^\mu \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad P_\alpha P^\alpha = m_0^2 = const. \quad (1.10)$$

Движение безмассовых частиц (изотропные геодезические) характеризуется четырёхмерным волновым вектором

$$K^\alpha = \frac{\omega}{c} \frac{dx^\alpha}{d\sigma}, \quad (1.11)$$

где ω собственная циклическая частота безмассовой частицы. При параллельном переносе в смысле Леви-Чивиты вектора K^α получаются динамические уравнения движения свободных безмассовых

(светоподобных) частиц

$$\frac{dK^\alpha}{d\sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha K^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} = 0, \quad K_\alpha K^\alpha = 0. \quad (1.12)$$

Итак, мы имеем динамические уравнения движения для свободных массовых частиц и свободных безмассовых частиц. Все эти уравнения записаны в четырёхмерном общековариантном виде. Это имеет как своё преимущество, так и существенный недостаток. Преимуществом является инвариантность таких уравнений при любых переходах от одной системы отсчёта к другой. К недостатку относится то, что в общековариантной форме члены уравнений не выражены через реальные трёхмерные величины, которые мы можем зарегистрировать в экспериментах или наблюдениях (т.е. через *физически наблюдаемые величины*). Это означает, что в общековариантной форме уравнения движения частиц могут иметь ценность только как промежуточный результат теории и не могут быть применены на практике. Поэтому, если мы хотим наглядно представить себе результаты какой-либо физико-математической теории, нам необходимо выразить её уравнения через физически наблюдаемые величины. В том числе, для расчётов движения конкретных частиц нам необходимо выразить общековариантные динамические уравнения движения через физически наблюдаемые характеристики этих частиц и наблюдаемые характеристики реальной физической системы отсчёта.

Однако проблема определения физических наблюдаемых величин вовсе не является тривиальной. Например, если для четырёхмерного вектора Q^α (у которого всего 4 компоненты) можно эвристически *предположить*, что три его пространственные компоненты образуют трёхмерный наблюдаемый вектор, а временная компонента представляет собой наблюдаемый потенциал этого векторного поля (что, в общем, не является доказательством их реальной наблюдаемости), то для контравариантного тензора второго ранга $Q^{\alpha\beta}$ (у которого целых 16 компонент) эта задача становится более неопределённой. Кроме того, возникает сложность, связанная с определением наблюдаемых компонент у ковариантных тензоров (индексы которых являются нижними) и тензоров смешанного типа, у которых есть и верхние и нижние индексы. Поэтому, чтобы не блуждать в потёмках эвристических догадок, наиболее рациональ-

ным выходом из положения является создание строгой математической теории, позволяющей вычислять наблюдаемые компоненты для любых тензорных величин. Такая математическая теория была создана в 1944 году Зельмановым и изложена в его диссертации [9]. Справедливости ради надо отметить, что над созданием теории наблюдаемых величин в 1930-е годы работали многие. Например, Ландау и Лифшиц в своей *Теории поля* [10, §84] вводят наблюдаемое время и наблюдаемый интервал аналогично Зельманову. Однако, ограничившись этим фрагментом теории, они не выводят общих математических методов определения физических наблюдаемых величин в псевдоримановом пространстве.

В последующие десятилетия Зельманов совершенствовал свой математический аппарат физических наблюдаемых величин (хронометрических инвариантов), изложив его в нескольких более поздних работах [11–13]. Поэтому в §1.2 этой главы мы ограничимся лишь кратким обзором методов теории физических наблюдаемых величин, необходимым для общего понимания и использования на практике. В §1.3 мы изложим результаты исследования геодезического движения частиц методами математического аппарата хронометрических инвариантов.

Теория, схожая с теорией Зельманова, была также предложена Карло Катано [14–17], итальянским математиком, работавшим независимо от Зельманова. Однако Катано опубликовал свою первую работу на эту тему только в 1958 году [14] и его работы были очень далеки от полной теории.

Параграф §1.4 посвящён постановке задачи построения динамических уравнений движения частиц по негеодезическим траекториям, т.е. под влиянием внешних сил негравитационной природы.

1.2 Физически наблюдаемые величины

В этом параграфе мы изложим основы математического аппарата хронометрических инвариантов А. Л. Зельманова*.

*Наиболее полное на сегодняшний день описание (компендиум) математического аппарата физически наблюдаемых величин в общей теории относительности дано в нашей недавней статье. В этой статье мы собрали всё (или почти всё), что мы знаем на эту тему от Зельманова и что было получено за прошедшие десятилетия: Rabounski D. and Borissova L. Physical observables in General Relativity and the Zelmanov chronometric invariants. *Progress in Physics*, 2023, vol. 19, no. 1, 3–29.

Чтобы математически определить, какие компоненты четырёхмерных величин представляют собой физически наблюдаемые величины, рассмотрим реальную систему отсчёта некоторого наблюдателя, состоящую из *координатной сетки*, натянутой на некоторое физическое тело — *тело отсчёта*, в каждой точке которого установлены *реальные часы*. Так как тело отсчёта является реальным физическим телом, то оно обладает некоторым гравитационным потенциалом, может вращаться и деформироваться, делая пространство отсчёта неоднородным и анизотропным. Таким образом, физически наблюдаемые величины должны получаться в результате проецирования четырёхмерных величин на пространство и время реального тела отсчёта наблюдателя.

Геометрически трёхмерное пространство представляет собой *пространственное сечение* $x^0 = ct = const$. В любой точке пространства-времени можно провести локальное пространственное сечение (локальное пространство), ортогональное *линии времени*. Если существует пространственно-временная огибающая локальных пространств, то она представляет собой пространственное сечение, всюду ортогональное линиям времени. Такое пространство называется *голономным*. Если невозможно провести огибающую этих локальных пространств, т.е. существуют только пространственные сечения, локально ортогональные к линиям времени, то такое пространство называется *неголономным*. Будем считать, что наблюдатель неподвижен относительно своих физических эталонов (тела отсчёта). Система отсчёта такого наблюдателя во всех перемещениях сопутствуют телу отсчёта и называется *сопутствующей системой отсчёта*. Все координатные сетки, покоящиеся относительно одного и того же тела отсчёта, связаны преобразованиями вида

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^0 &= \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ \tilde{x}^i &= \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3), \quad \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.13)$$

где последнее равенство означает независимость пространственных координат в тильдованной сетке от времени в нетильдованной, что эквивалентно заданию в каждой точке координатной сетки конкретных и неизменных линий времени $x^i = const$. Преобразование координат означает просто переход от одной координатной сетки к другой в одном и том же пространственном сечении. Преобра-

зование времени означает замену всего набора часов, т.е. переход к другому пространственному сечению (пространству отсчёта). На практике — это фактическая замена одного тела отсчёта со всеми его физическими эталонами другим телом отсчёта с другими эталонами. Но при сравнении с другими эталонами наблюдатель получит совершенно другие результаты (наблюдаемые величины). Поэтому физически наблюдаемые величины должны быть инвариантны относительно преобразований времени, т.е. должны быть *хронометрически инвариантными величинами*.

Так как преобразования (1.13) устанавливают совокупность фиксированных линий времени, то хронометрическими инвариантами (физически наблюдаемыми величинами) являются все величины, инвариантные относительно данных преобразований.

Практически, чтобы получить физически наблюдаемые величины в сопутствующей системе отсчёта, необходимо вычислить хронометрически инвариантные проекции четырёхмерных величин на время и на пространство реального физического тела отсчёта и выразить их через хронометрически инвариантные (физически наблюдаемые) характеристики пространства отсчёта.

Собственно проецирование четырёхмерных величин производится с помощью операторов, характеризующих свойства реального пространства отсчёта. Оператор проецирования на время b^α представляет собой единичный вектор четырёхмерной скорости наблюдателя относительно его тела отсчёта

$$b^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (1.14)$$

который касателен к четырёхмерной траектории наблюдателя в каждой её точке. Так как любую систему отсчёта характеризует свой единичный касательный вектор b^α , то Зельманов назвал этот вектор *монадой*.

Оператор проецирования на пространство определяется как четырёхмерный симметричный тензор

$$h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta, \quad h^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} + b^\alpha b^\beta, \quad (1.15)$$

смешанные компоненты которого имеют вид

$$h_\alpha^\beta = -g_\alpha^\beta + b_\alpha b^\beta. \quad (1.16)$$

Зельманов также показал в своих работах, что эти величины обладают необходимыми свойствами операторов проецирования. Проекция тензорной величины на время представляет собой результат её свёртывания с вектором монады, тогда как проецирование на пространство есть свёртка с тензором проецирования на пространство.

В сопутствующей системе отсчёта трёхмерная скорость наблюдателя относительно тела отсчёта равна нулю $b^i = 0$. Остальные компоненты вектора монады равны

$$b^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, \quad b_0 = g_{0\alpha} b^\alpha = \sqrt{g_{00}}, \quad b_i = g_{i\alpha} b^\alpha = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (1.17)$$

Соответственно, при $b^i = 0$ компоненты тензора проецирования на пространство принимают вид

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &= 0, & h^{00} &= -g^{00} + \frac{1}{g_{00}}, & h_0^0 &= 0 \\ h_{0i} &= 0, & h^{0i} &= -g^{0i}, & h_i^0 &= \delta_0^i = 0 \\ h_{i0} &= 0, & h^{i0} &= -g^{i0}, & h_i^0 &= \frac{g_{i0}}{g_{00}} \\ h_{ik} &= -g_{ik} + \frac{g_{0i}g_{0k}}{g_{00}}, & h^{ik} &= -g^{ik}, & h_k^i &= -g_k^i = \delta_k^i \end{aligned} \right\}. \quad (1.18)$$

Тензор $h_{\alpha\beta}$ в трёхмерном пространстве сопутствующей системы отсчёта обладает свойствами, аналогичными свойствам фундаментального метрического тензора, а именно

$$h_\alpha^i h_k^\alpha = \delta_k^i - b_k b^i = \delta_k^i, \quad \delta_k^i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.19)$$

где δ_k^i единичный трёхмерный тензор*. Таким образом, в сопутствующей системе отсчёта трёхмерный тензор h_{ik} может поднимать и опускать индексы у х.и.-величин.

Проекция на время и на пространство произвольного вектора Q^α (тензора 1-го ранга) в сопутствующей системе отсчёта ($b^i = 0$)

*Тензор δ_k^i представляет собой трёхмерную часть четырёхмерного единичного тензора δ_β^α , с помощью которого можно производить операцию замены индексов у четырёхмерных величин.

принимают следующий вид

$$T = b^\alpha Q_\alpha = b^0 Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (1.20)$$

$$L^0 = h_\beta^0 Q^\beta = -\frac{g_{0k}}{g_{00}} Q^k, \quad L^i = h_\beta^i Q^\beta = \delta_k^i Q^k = Q^k. \quad (1.21)$$

Приведём проекции произвольного тензора 2-го ранга $Q^{\alpha\beta}$ в сопутствующей системе отсчёта

$$T = b^\alpha b^\beta Q_{\alpha\beta} = b^0 b^0 Q_{00} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}, \quad (1.22)$$

$$L^{00} = h_\alpha^0 h_\beta^0 Q^{\alpha\beta} = -\frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}^2} Q^{ik}, \quad L^{ik} = h_\alpha^i h_\beta^k Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}. \quad (1.23)$$

Проверяя опытным путём инвариантность полученных величин относительно преобразований (1.13), мы получаем, что физически наблюдаемыми (хронометрически инвариантными) являются только проекции четырёхмерной величины на время и пространственные компоненты её проекции на пространство.

Итак, проецируя четырёхмерные координаты x^α на время и на пространство, получаем *физически наблюдаемое время*

$$\tau = \sqrt{g_{00}} t + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} x^i, \quad (1.24)$$

и *физически наблюдаемые координаты*, которые совпадают с пространственными координатами x^i . Аналогично, при проецировании элементарного интервала четырёхмерных координат dx^α , получаем элементарный интервал физического наблюдаемого времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i, \quad (1.25)$$

и элементарный интервал физических наблюдаемых координат dx^i . Соответственно, *физическая наблюдаемая скорость* частицы есть трёхмерный х.и.-вектор

$$\mathbf{v}^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (1.26)$$

который, как очевидно, отличается от вектора её трёхмерной координатной скорости, равной $u^i = \frac{dx^i}{dt}$.

Проецируя фундаментальный метрический тензор $g_{\alpha\beta}$ на пространство, получаем, что в сопутствующей системе отсчёта h_{ik} является *х.и.-метрическим тензором*, или, другими словами, *физически наблюдаемым метрическим тензором* образованным пространственными составляющими тензора проецирования на пространство, т.е.

$$h_{\alpha}^i h_{\beta}^k g^{\alpha\beta} = g^{ik} = -h^{ik}, \quad h_i^{\alpha} h_k^{\beta} g_{\alpha\beta} = g_{ik} - b_i b_k = -h_{ik}. \quad (1.27a)$$

Его компоненты равны

$$h_{ik} = -g_{ik} + b_i b_k, \quad h^{ik} = -g^{ik}, \quad h_k^i = -g_k^i = \delta_k^i. \quad (1.27b)$$

Таким образом, квадрат трёхмерного физического наблюдаемого интервала $d\sigma$ имеет вид

$$d\sigma^2 = h_{ik} dx^i dx^k. \quad (1.28)$$

Четырёхмерный пространственно-временной интервал, выраженный через физически наблюдаемые величины, получается при подстановке $g_{\alpha\beta}$ из (1.15)

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \quad (1.29)$$

Однако, кроме проекций на время и пространство, у четырёхмерных величин 2-го и более высокого ранга есть также смешанные компоненты, имеющие одновременно и верхние и нижние индексы. Как определить, есть ли среди них физически наблюдаемые величины? Для этого было бы наиболее целесообразным разработать обобщённый метод вычисления физических наблюдаемых величин, основанный исключительно на свойстве их хронометрической инвариантности и позволяющий сразу найти все наблюдаемые величины для любого тензора. Такой метод был разработан Зельмановым и сформулирован в виде теоремы:

Теорема Зельманова

Пусть существует четырёхмерный тензор $Q_{\alpha\beta\dots\sigma}^{\mu\nu\dots\rho}$ ранга r , где $Q_{00\dots0}^{ik\dots p}$ представляет собой трёхмерную часть тензора $Q_{00\dots0}^{\mu\nu\dots\rho}$, у которого все верхние индексы не равны нулю, а все m нижних индексов равны нулю. Тогда величина

$$T^{ik\dots p} = (g_{00})^{-\frac{m}{2}} Q_{00\dots0}^{ik\dots p} \quad (1.30)$$

представляет собой трёхмерный контравариантный (с верхними индексами) х.и.-тензор $(r - m)$ -го ранга. Это означает, что х.и.-тензор $T^{ik\dots p}$ является результатом m -кратного проецирования исходного тензора $Q_{\alpha\beta\dots\sigma}^{\mu\nu\dots\rho}$ на линию времени по индексам $\alpha, \beta, \dots, \sigma$ и на пространственное сечение — по $r - m$ индексам μ, ν, \dots, ρ .

Из этой теоремы непосредственно следует, что для вектора Q^α физически наблюдаемыми являются две величины, полученные ранее путём проецирования

$$b^\alpha Q_\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h_\alpha^i Q^\alpha = Q^i. \quad (1.31)$$

Для симметричного тензора 2-го ранга $Q^{\alpha\beta}$ физически наблюдаемыми являются три величины

$$b^\alpha b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}, \quad h^{i\alpha} b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q_0^i}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h_\alpha^i h_\beta^k Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}, \quad (1.32)$$

в то время как для антисимметричного тензора 2-го ранга первая наблюдаемая компонента равна нулю, так как $Q_{00} = Q^{00} = 0$.

Вычисленные таким образом физически наблюдаемые величины (хронометрические инварианты) необходимо сравнить с эталонами — наблюдаемыми характеристиками пространства отсчёта, специфическими для каждого конкретного тела отсчёта. Поэтому рассмотрим основные наблюдаемые характеристики пространства отсчёта, через которые мы будем выражать итоговые уравнения теории.

Физически наблюдаемые характеристики пространства отсчёта выводятся с помощью х.и.-операторов дифференцирования по времени и по пространственным координатам

$$\frac{* \partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{* \partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0}, \quad (1.33)$$

которые некоммутативны

$$\frac{* \partial^2}{\partial x^i \partial t} - \frac{* \partial^2}{\partial t \partial x^i} = \frac{1}{c^2} F_i \frac{* \partial}{\partial t}, \quad (1.34)$$

$$\frac{* \partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{* \partial^2}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{2}{c^2} A_{ik} \frac{* \partial}{\partial t}. \quad (1.35)$$

Величина A_{ik} представляет собой трёхмерный антисимметричный *х.и.-тензор угловой скорости с которой вращается трёхмерное пространство тела отсчёта наблюдателя*

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_k - F_k v_i), \quad (1.36)$$

где v_i обозначает линейную скорость вращения пространства

$$\left. \begin{aligned} v_i &= -c \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}, & v^i &= -c g^{0i} \sqrt{g_{00}} \\ v_i &= h_{ik} v^k, & v^2 &= v_k v^k = h_{ik} v^i v^k \end{aligned} \right\}. \quad (1.37)$$

Как было показано Зельмановым, равенство нулю тензора A_{ik} является необходимым и достаточным условием голономности пространства. При этом $g_{0i} = 0$ и $v_i = 0$. В неголономном пространстве всегда $A_{ik} \neq 0$. Таким образом, тензор A_{ik} также является тензором неголономности пространства*.

Величина F_i представляет собой трёхмерный *х.и.-вектор гравитационно-инерциальной силы*

$$F_i = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right), \quad (1.38)$$

где w обозначает гравитационный потенциал пространства тела отсчёта†

$$w = c^2 (1 - \sqrt{g_{00}}), \quad (1.38a)$$

В квазиньютоновом приближении (т.е. в слабом гравитационном поле при скоростях, много меньших скорости света, и при отсутствии вращения пространства) F_i принимает вид нерелятивистской гравитационной силы

$$F_i = \frac{\partial w}{\partial x^i}. \quad (1.39)$$

*Голономными ($A_{ik} = 0$) являются пространство-время специальной теории относительности (пространство Минковского) в галилеевой системе отсчёта и некоторые частные случаи пространства общей теории относительности.

†Величины w и v_i сами не обладают свойством хронометрической инвариантности. Хронометрическими инвариантами являются образованные с их помощью вектор гравитационно-инерциальной системы и тензор угловой скорости вращения пространства.

Так как тело отсчёта наблюдателя является реальным физическим телом, то нанесённые на него координатные сетки деформированы. Соответственно, деформировано и пространство реального тела отсчёта. Поэтому, при сравнении наблюдаемых величин с физическими эталонами тела отсчёта необходимо учитывать поле деформации пространство отсчёта, т.е. нестационарность поля тензора h_{ik} . Это можно сделать, выделяя в уравнениях трёхмерный симметричный *х.и.-тензор скоростей деформации*

$$\left. \begin{aligned} D_{ik} &= \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ik}}{\partial t}, & D^{ik} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial h^{ik}}{\partial t} \\ D &= h^{ik} D_{ik} = D_n^n = \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial t} \\ h &= \det ||h_{ik}|| \end{aligned} \right\}. \quad (1.40)$$

В реальности стационарная деформация пространства встречается редко: поле деформации непрерывно изменяется, что также необходимо учитывать при измерениях.

Зная эти определения, мы можем выразить вообще любой геометрический объект риманова пространства через наблюдаемые характеристики пространства отсчёта. Например, как известно, входящие в уравнения движения символы Кристоффеля тензорами не являются [18]. Тем не менее их тоже можно выразить через физически наблюдаемые величины.

Соответствующие выражения для символов Кристоффеля были получены Зельмановым [9]

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{c^3} \left[\frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial w}{\partial t} + \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) v_k F^k \right], \quad (1.41)$$

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 F^k, \quad (1.42)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{c^2} \left[-\frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial w}{\partial x^i} + v_k \left(D_i^k + A_{i \cdot}^k + \frac{1}{c^2} v_i F^k \right) \right], \quad (1.43)$$

$$\Gamma_{0i}^k = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left(D_i^k + A_{i \cdot}^k + \frac{1}{c^2} v_i F^k \right), \quad (1.44)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{c\left(1 - \frac{w}{c^2}\right)} \left\{ -D_{ij} + \frac{1}{c^2} v_n \times \right. \\ \times \left[v_j (D_i^n + A_i^n) + v_i (D_j^n + A_j^n) + \frac{1}{c^2} v_i v_j F^n \right] + \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right) - \frac{1}{2c^2} (F_i v_j + F_j v_i) - \Delta_{ij}^n v_n \right\}, \quad (1.45)$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Delta_{ij}^k - \frac{1}{c^2} \left[v_i (D_j^k + A_j^k) + v_j (D_i^k + A_i^k) + \frac{1}{c^2} v_i v_j F^k \right], \quad (1.46)$$

где Δ_{ij}^k х.и.-символы Кристоффеля, определённые аналогично обычным символам Кристоффеля (1.2), но через наблюдаемый х.и.-метрический тензор h_{ik} и х.и.-операторы дифференцирования

$$\Delta_{jk}^i = h^{im} \Delta_{jk,m} = \frac{1}{2} h^{im} \left(\frac{* \partial h_{jm}}{\partial x^k} + \frac{* \partial h_{km}}{\partial x^j} - \frac{* \partial h_{jk}}{\partial x^m} \right). \quad (1.47)$$

По аналогии с абсолютными производными, Зельманов также ввёл х.и.-производные

$$* \nabla_i Q_k = \frac{* \partial Q_k}{\partial x^i} - \Delta_{ik}^l Q_l, \quad (1.48)$$

$$* \nabla_i Q^k = \frac{* \partial Q^k}{\partial x^i} + \Delta_{il}^k Q^l, \quad (1.49)$$

$$* \nabla_i Q_{jk} = \frac{* \partial Q_{jk}}{\partial x^i} - \Delta_{ij}^l Q_{lk} - \Delta_{ik}^l Q_{jl}, \quad (1.50)$$

$$* \nabla_i Q_j^k = \frac{* \partial Q_j^k}{\partial x^i} - \Delta_{ij}^l Q_l^k + \Delta_{il}^k Q_j^l, \quad (1.51)$$

$$* \nabla_i Q^{jk} = \frac{* \partial Q^{jk}}{\partial x^i} + \Delta_{il}^j Q^{lk} + \Delta_{il}^k Q^{jl}, \quad (1.52)$$

$$* \nabla_i Q^i = \frac{* \partial Q^i}{\partial x^i} + \Delta_{ji}^j Q^i, \quad (1.53)$$

$$* \nabla_i Q^{ji} = \frac{* \partial Q^{ji}}{\partial x^i} + \Delta_{il}^j Q^{il} + \Delta_{li}^j Q^{ji}, \quad (1.54)$$

где

$$\Delta_{li}^j = \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i}. \quad (1.55)$$

Итак, мы изложили основы идеологии и математического аппарата хронометрических инвариантов. Теперь, получив общековариантными методами какие-либо уравнения, мы можем вычислить их х.и.-проекцию на время и на пространство конкретного тела отсчёта и выразить через реальные физически наблюдаемые характеристики. В результате получаются уравнения, содержащие только такие величины, которые мы реально измеряем на практике.

Естественно, первое, что приходит в голову сделать, вооружившись этим математическим аппаратом, это вычислить х.и.-динамические уравнения движения свободных частиц и исследовать полученные результаты.

Частное решение данной задачи было получено Зельмановым в его работах [9, 11–13]. Общее решение было получено нами в предыдущей книге [19]; об этом общем решении мы расскажем в следующем параграфе.

1.3 Динамические уравнения движения свободных частиц

Абсолютная производная собственного вектора движения частицы по скалярному параметру ρ , не равному нулю вдоль траектории движения, представляет собой четырёхмерный вектор

$$N^\alpha = \frac{dQ^\alpha}{d\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha Q^\mu \frac{dx^\nu}{d\rho}, \quad (1.56)$$

поэтому физически наблюдаемые х.и.-компоненты уравнений движения определяются точно так же, как и для любого произвольного четырёхмерного вектора (1.31)

$$\frac{N_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g_{0\alpha} N^\alpha}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} (g_{00} N^0 + g_{0i} N^i), \quad (1.57)$$

$$N^i = h_\beta^i N^\beta = h_0^i N^0 + h_k^i N^k. \quad (1.58)$$

С геометрической точки зрения — это проекция вектора N^α на время и пространственные компоненты его проекции на пространство в сопутствующей точке отсчёта.

Аналогично мы можем спроецировать общековариантные динамические уравнения движения свободных массовых частиц (1.10) и свободных безмассовых частиц (1.12). Техника этих вычислений подробно описана нами в [19] во всех необходимых деталях.

В результате получаются х.и.-динамические уравнения движения свободных массовых частиц

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k = 0, \quad (1.59)$$

$$\frac{d(mv^i)}{d\tau} + 2m(D_k^i + A_k^i)v^k - mF^i + m\Delta_{nk}^i v^n v^k = 0, \quad (1.60)$$

и свободных безмассовых частиц

$$\frac{dk}{d\tau} - \frac{k}{c^2} F_i c^i + \frac{k}{c^2} D_{ik} c^i c^k = 0, \quad (1.61)$$

$$\frac{d(kc^i)}{d\tau} + 2k(D_k^i + A_k^i)c^k - kF^i + k\Delta_{nk}^i c^n c^k = 0, \quad (1.62)$$

где m релятивистская масса массовой частицы, $k = \frac{\omega}{c}$ волновое число, характеризующее безмассовую частицу, и c^i трёхмерный х.и.-вектор скорости света. Причём, как видите, в отличие от общековариантных динамических уравнений движения (1.10, 1.12), в х.и.-уравнениях движения мы имеем единый параметр дифференцирования как для массовых, так и для безмассовых частиц (физическое наблюдаемое время τ).

Эти уравнения были впервые получены Зельмановым в 1944 году [9]. Однако впоследствии мы обнаружили, что входящая в них функция времени $\frac{dt}{d\tau}$ является строго положительной [19]. Физическое время наблюдателя всегда имеет положительный ход $d\tau > 0$. Ход координатного времени dt показывает изменение временной координаты частицы $x^0 = ct$ относительно часов наблюдателя. Поэтому знак функции времени показывает направление движения частицы во времени относительно наблюдателя. Функция времени $\frac{dt}{d\tau}$ выводится из условия постоянства квадрата четырёхмерной скорости частицы $u_\alpha u^\alpha = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = const.$ вдоль её четырёхмерной траектории [19]. Уравнения относительно $\frac{dt}{d\tau}$ для досветовых массовых частиц, для безмассовых частиц и сверхсветовых массовых частиц получаются одинаковыми и имеют два корня

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_{1,2} = \frac{v_i v^i \pm c^2}{c^2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)}. \quad (1.63)$$

Как было получено [19], ход времени является прямым, если $v_i v^i \pm c^2 > 0$, ход времени является обратным при $v_i v^i \pm c^2 < 0$, время останавливается при $v_i v^i \pm c^2 = 0$. Таким образом, существует целый спектр решений для различных типов частиц и их направлений движения во времени относительно наблюдателя. Например, релятивистская масса частицы, являющаяся проекцией её четырёхмерного динамического вектора на время $\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m$, получается положительной при движении в будущее и принимает отрицательное значение при движении в прошлое*.

В нашей предыдущей работе [19] было также показано, что х.и.-динамические уравнения движения свободных массовых частиц с обратным ходом времени, т.е. движущихся из будущего в прошлое (по отношению к обычному наблюдателю), имеют вид

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k = 0, \quad (1.64)$$

$$\frac{d(mv^i)}{d\tau} + mF^i + m\Delta_{nk}^i v^n v^k = 0. \quad (1.65)$$

а для безмассовых частиц с обратным ходом времени

$$-\frac{dk}{d\tau} - \frac{k}{c^2} F_i c^i + \frac{k}{c^2} D_{ik} c^i c^k = 0, \quad (1.66)$$

$$\frac{d(kc^i)}{d\tau} + kF^i + k\Delta_{nk}^i c^n c^k = 0. \quad (1.67)$$

Для сверхсветовых частиц уравнения движения получаются аналогичными досветовым (1.64, 1.65), только у релятивистской массы m в качестве множителя стоит мнимая единица i .

Асимметричность уравнений движения частиц в будущее и в прошлое получается из-за различия физических условий при прямом и обратном ходе времени, приводящего к исчезновению некоторых членов уравнений.

Кроме этого, в [19] мы рассмотрели движение массовых и безмассовых частиц в рамках концепции частица-волна, полагая, что движение любых частиц можно представить как распространение

*Релятивистская масса является проекцией четырёхмерного вектора частицы на линию времени наблюдателя.

волн в приближении геометрической оптики. В этом случае динамический вектор безмассовых частиц имеет вид

$$K_\alpha = \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, \quad (1.68)$$

где ψ фаза волны (эйконал). Аналогично мы рассматриваем динамический вектор безмассовых частиц

$$P_\alpha = \frac{\hbar}{c} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}, \quad (1.69)$$

где \hbar постоянная Планка. Уравнение фазы волны (уравнение эйконала) в приближении геометрической оптики представляет собой условие $K_\alpha K^\alpha = 0$. Тогда х.и.-уравнение эйконала для безмассовых частиц

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - h^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0, \quad (1.70)$$

и для массовых частиц

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2 - h^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}. \quad (1.71)$$

После подстановки волновой формы динамического вектора в общековариантные динамические уравнения движения (1.10, 1.12) и их проецирования на время и на пространство получается волновая форма х.и.-динамических уравнений движения. Для массовых частиц эти уравнения имеют вид

$$\pm \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + F^i \frac{\partial \psi}{\partial x^i} - D_k^i v^k \frac{\partial \psi}{\partial x^i} = 0, \quad (1.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(h^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) - (D_k^i + A_k^i) \left(\pm \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} v^k - h^{km} \frac{\partial \psi}{\partial x^m} \right) \pm \\ \pm \frac{1}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} F^i + h^{mn} \Delta_{mk}^i v^k \frac{\partial \psi}{\partial x^n} = 0, \end{aligned} \quad (1.73)$$

где знак плюс у знакопеременных членов имеет место при движении частиц из прошлого в будущее (прямой ход времени) и знак минус при движении из будущего в прошлое (обратный ход времени). Причём, в отличие от корпускулярной формы уравнений движения

(1.59, 1.60) и (1.64, 1.65), данные уравнения симметричны относительно направления движения частиц во времени. Для безмассовых частиц волновая форма х.и.-динамических уравнений движения отличается только тем, что вместо трёхмерной наблюдаемой скорости частицы v^i там стоит трёхмерный х.и.-вектор скорости света c^i .

Асимметричность корпускулярных уравнений движения в будущее и в прошлое приводит нас к очевидному выводу о том, что в четырёхмерном неоднородном пространстве-времени существует некоторая фундаментальная асимметрия направлений во времени. Чтобы понять физический смысл этой фундаментальной асимметрии, в предыдущей работе был введён принцип зеркала [19].

Представим себе, что в четырёхмерном пространстве-времени расположено *зеркало*, которое совпадает с пространственным сечением и, таким образом, отделяет прошлое от будущего. Тогда частицы и волны, движущиеся из прошлого в будущее (с положительной релятивистской массой и частотой), ударяются о зеркало и начинают двигаться в обратном направлении во времени, т.е. в прошлое. При этом их характеристики приобретают отрицательные значения. И наоборот, частицы и волны, движущиеся в прошлое (с отрицательной релятивистской массой и частотой), ударившись о зеркало, меняют свои характеристики на положительные и начинают двигаться в будущее. Тогда при отражении от нашего зеркала величина $\frac{*d\psi}{dt}$ меняет свой знак и уравнения распространения волны в будущее преобразуются в уравнения распространения этой же волны в прошлое (и наоборот). Причём уравнения распространения волн при отражении во времени преобразуются друг в друга *полностью*, без сокращения и без возникновения новых членов. То есть для волновой формы материи имеет место *полное отражение* от нашего зеркала. Однако корпускулярные уравнения движения при отражении от нашего зеркала преобразуются *не полностью*. В пространственных компонентах уравнений для массовых и безмассовых частиц, движущихся из прошлого в будущее, присутствует дополнительный член

$$2m(D_k^i + A_k^i)v^k, \quad 2k(D_k^i + A_k^i)c^k, \quad (1.74)$$

отсутствующий в уравнениях движения из будущего в прошлое. Уравнения движения частицы в прошлое при взаимодействии с

зеркалом приобретают дополнительный член. И наоборот, уравнения движения частицы в будущее после столкновения с зеркалом теряют один член. Это означает, что, как и в случае с движением частиц (корпускулярные уравнения движения), так и в случае с распространением волн (волновые уравнения движения), мы имеем дело не с простым “отскакиванием” от зеркала, а с *прохождением* сквозь само зеркало в другой мир, т.е. в *зазеркалье*.

В *мире зазеркалья* все частицы имеют отрицательные массы и частоты, и движутся (с точки зрения наблюдателя в нашем мире) из будущего в прошлое. При этом волновая форма материи нашего мира не влияет на события в зазеркалье, и волновая форма материи из зазеркалья не влияет на события в нашем мире. Наоборот, корпускулярная форма материи (частицы) нашего мира может оказывать влияние на события в зазеркалье, и частицы материи зазеркалья могут влиять на события нашего мира. Полная изоляция нашего мира от мира зазеркалья (то есть отсутствие взаимного влияния частиц из обоих миров) реализуется при очевидном условии $D_k^i v^k = -A_k^i v^k$, при котором дополнительный член в корпускулярных уравнения движения равен нулю. Это происходит, в частности, когда $D_k^i = 0$ и $A_k^i = 0$, т.е. при полном отсутствии деформации и вращения пространства тела отсчёта.

До сих пор мы рассматривали движения частиц только вдоль неизотропных траекторий, где $ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 > 0$, и вдоль изотропных (светоподобных) траекторий, где $ds^2 = 0$ и $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 \neq 0$. Кроме этого, в предыдущей работе [19] мы рассмотрели траектории третьего типа, для которых, кроме $ds^2 = 0$, выполняются более строгие условия $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 = 0$. Тогда

$$d\tau = \left[1 - \frac{1}{c^2} (w + v_i u^i) \right] dt = 0, \quad (1.75)$$

$$d\sigma^2 = h_{ik} dx^i dx^k = 0. \quad (1.76)$$

Такие траектории мы называем *полностью вырожденными* или *нуль-траекториями*, так как с точки зрения обычного досветового наблюдателя вдоль них равны нулю интервал наблюдаемого времени и наблюдаемый трёхмерный интервал. Можно также показать, что вдоль нуль-траекторий определитель фундаментального метрического тензора риманова пространства равен нулю, т.е. $g = 0$. В

римановом пространстве по определению $g < 0$, т.е. метрика является строго невырожденной. Следовательно нуль-траектории лежат за пределами риманова пространства. Пространство с полностью вырожденной метрикой мы будем называть *нуль-пространством*, а частицы, движущиеся по траекториям в этом пространстве, будем называть *нуль-частицами*.

Физические условия, при которых происходит полное вырождение пространства-времени, получаются из формул (1.75, 1.76)

$$w + v_i u^i = c^2, \quad (1.77)$$

$$g_{ik} u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2. \quad (1.78)$$

Соответственно, масса нуль-частиц M , включающая физические условия вырождения, отличается от релятивистской массы m обычных частиц невырожденного пространства-времени и имеет вид

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2} (w + v_i u^i)}, \quad (1.79)$$

т.е. представляет собой отношение двух величин, каждая из которых при вырождении метрики равна нулю, но их отношение не равно нулю*.

Корпускулярная и волновая формы динамического собственного вектора нуль-частиц имеют вид

$$P^\alpha = \frac{M}{c} \frac{dx^\alpha}{dt}, \quad P_\alpha = \frac{\hbar}{c} \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha}. \quad (1.80)$$

Тогда корпускулярная форма х.и.-динамических уравнений движения в нуль-пространстве имеет вид

$$M D_{ik} u^i u^k = 0, \quad (1.81)$$

$$\frac{d}{dt} (M u^i) + M \Delta_{nk}^i u^n u^k = 0. \quad (1.82)$$

* Аналогичная ситуация имеет место для безмассовых частиц, так как при скорости света ($v^2 = c^2$) величины $m_0 = 0$ и $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0$, но их отношение не равно нулю $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \neq 0$.

Волновая форма этих уравнений имеет вид

$$D_k^m u^k \frac{* \partial \psi}{\partial x^m} = 0, \quad (1.83)$$

$$\frac{d}{dt} \left(h^{ik} \frac{* \partial \psi}{\partial x^k} \right) + h^{mn} \Delta_{mk}^i u^k \frac{* \partial \psi}{\partial x^n} = 0. \quad (1.84)$$

Уравнение эйконала для нуль-частиц имеет вид

$$h^{ik} \frac{* \partial \psi}{\partial x^i} \frac{* \partial \psi}{\partial x^k} = 0, \quad (1.85)$$

и представляет собой уравнение стоячей волны (информационное кольцо). Таким образом, с точки зрения обычного досветового наблюдателя, всё нуль-пространство заполнено системой стоячих волн (нуль-частиц), т.е. *голограммой*. Кроме того, в нуль-пространстве наблюдаемое время имеет одно и то же значение для любых двух событий (1.75). Это означает, что с точки зрения обычного наблюдателя скорость нуль-частиц бесконечна, т.е. нуль-частицы могут мгновенно переносить информацию из одной точки нашего мира в другую, осуществляя *дальнодействие*, и являются носителями какого-то особого вида взаимодействия, природа которого, возможно, прояснится при будущих исследованиях.

1.4 Негеодезическое движение частиц. Постановка задачи

Итак, при свободном движении частицы (движение вдоль геодезических линий) абсолютная производная динамического вектора частицы (четырёхмерного вектора импульса) равна нулю, и его квадрат сохраняется вдоль траектории движения, т.е. параллельный перенос осуществляется в смысле Леви-Чивиты.

При несвободном (негеодезическом) движении частицы абсолютная производная её четырёхмерного импульса не равна нулю. Однако в этом случае равна нулю абсолютная производная от суммы четырёхмерного импульса частицы P^α и вектора импульса L^α , приобретаемого частицей из-за её взаимодействия с внешним полем или полями, которые отклоняют её движение от геодезической линии. В принципе можно осуществлять параллельный перенос суперпозиции скольких угодно векторов [1]. Таким образом, для построения динамических уравнений негеодезического движения ча-

стиц необходимо, прежде всего, определить возмущающие поля негравитационной природы.

Естественно, внешнее поле будет взаимодействовать с частицей, отклоняя её от геодезической линии, только в том случае, если эта частица обладает физическим свойством того же рода, что и внешнее поле. На сегодняшний день, известны три фундаментальных физических свойства частиц, не сводящиеся ни к каким другим. Это *масса* частицы, *электрический заряд* и *спин*. Если фундаментальность первых двух свойств не вызвала сомнений, то в первые годы после опытов О. Штерна и В. Герлаха (1921) и их интерпретации С. Гаудсмитом и Г. Уленбеком (1925) спин электрона интерпретировался как его собственный момент импульса, вызванный вращением вокруг своей оси. Однако эксперименты последующих десятилетий, в частности, открытие спина и у других элементарных частиц, показали ошибочность представления о частицах со спином, как о быстро вращающихся волчках. Спин оказался таким же фундаментальным свойством частиц, как масса и заряд, хотя он имеет размерность момента импульса и при взаимодействиях проявляется в виде собственного вращательного момента частицы. Гравитационное поле в настоящее время геометризовано. В теории хронометрических инвариантов гравитационно-инерциальная сила и гравитационный потенциал (1.38) получены как функции только геометрических свойств самого пространства. Поэтому при движении частицы в псевдоримановом пространстве мы фактически рассматриваем её движение в гравитационном поле. Однако, можно ли выразить через геометрические характеристики пространства электромагнитную силу и потенциал, до сих пор неизвестно. Поэтому электромагнитное поле пока не геометризовано и вводится в пространство-время как отдельное тензорное поле (поле тензора Максвелла).

На данный момент основные уравнения электромагнитной теории получены в общековариантном виде. Несмотря на это, конкретные задачи из-за сложности вычислений тензора энергии-импульса электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве обычно решают или для каких-то частных случаев или в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского. В рамках этой теории заряженная частица получает от электромагнитного поля четырёхмерный импульс $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, где A^α четырёхмерный потенциал электромагнитно-

го поля и e заряд частицы [10, 20]. Суммируя этот дополнительный импульс с собственным вектором импульса частицы и осуществляя параллельный перенос, мы получим общековариантные динамические уравнения движения заряженных частиц.

Сложнее дело обстоит для частицы со спином. Чтобы вычислить импульс, сообщаемый частице за счёт её спина, необходимо определить внешнее поле, взаимодействующее со спином как с фундаментальным свойством частицы. Первоначально эту задачу рассматривали только методами квантовой механики (уравнения Дирака, 1928). Геометрическими методами общей теории относительности эту проблему одним из первых исследовал А. Папапетру, затем — совместно с Е. Кориналдези [21, 22]. В основе их подхода было представление о частицах вообще как о механических монополях и диполях. С такой точки зрения обычная массовая частица — *механический монополь*. Частица, которую можно представить в виде двух масс, вращающихся вокруг общего центра тяжести — *механический диполь*. Таким образом, опираясь на представление о частице со спином как о вращающемся волчке, можно (в некотором приближении) рассматривать её в виде механического диполя, центр тяжести которого лежит под поверхностью частицы. Затем Папапетру и Кориналдези рассмотрели движение механического диполя в псевдоримановом пространстве с метрикой Шварцшильда, т.е. в очень частном случае, когда вращение пространства равно нулю и его метрика стационарна (тензор скоростей деформации равен нулю).

Безусловно, метод, предложенный Папапетру, заслуживает внимания, но у него есть существенный недостаток. Разработанный ещё в 1940-е годы, он полностью основан на представлении о частице со спином как о быстро вращающемся волчке, что не соответствует экспериментальным данным последних десятилетий*.

Существует и другой способ решить задачу о движении частицы со спином. В римановом пространстве фундаментальный метрический тензор является симметричным $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$. Тем не менее можно построить такое пространство, в котором метрический тензор име-

* Действительно, если представить себе электрон в виде шарика с радиусом $r_e = 2,8 \times 10^{-13}$ см, то линейная скорость его спинового вращения на поверхности составит $u = \frac{\hbar}{2m_0 r_e} = 2 \times 10^{11}$ см/сек, т.е. почти в 70 раз больше скорости света. Однако эксперименты показывают, что таких скоростей в электроне нет.

ет произвольную форму $g_{\alpha\beta} \neq g_{\beta\alpha}$ (геометрия такого пространства будет неримановой). Тогда в метрическом тензоре можно выделить антисимметричную часть, не равную нулю*. Соответствующие добавки получаются также в символах Кристоффеля $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$ (1.2) и в тензоре кривизны Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\mu\nu}$. Результатом этих добавок является то, что при переносе по замкнутому контуру вектор не приходит в начальную точку, т.е. траектория переноса закручивается наподобие спирали. Такое пространство называют пространством с кручением. В этом пространстве можно рассмотреть спиновое вращение частицы как перенос вектора вращения по контуру её поверхности, генерирующий локальное поле кручения пространства. Однако у этого метода также есть существенные недостатки. Во-первых, при $g_{\alpha\beta} \neq g_{\beta\alpha}$ функции компонент с разным порядком индексов могут быть самыми разнообразными. Эти функции необходимо как-то фиксировать, фактически задавая конкретное поле кручения, что резко сужает область решений, позволяя строить уравнения движения только для ряда частных случаев. Во-вторых, этот метод полностью основан на предположении о физической природе спина как о локальном поле кручения, вызванном переносом вектора вращения частицы по контуру. А это, в свою очередь, опять-таки подразумевает представление о частице со спином как о вращающемся волчке конечного радиуса (как и в методе Папапетру), что не соответствует экспериментальным данным.

Тем не менее нет сомнений, что дополнительный импульс, сообщаемый частице со спином, можно построить геометрическими методами общей теории относительности. Сложив его с собственным динамическим вектором частицы (воздействие гравитационного поля) и осуществив параллельный перенос, мы получим общековариантные динамические уравнения движения частицы со спином†.

* Вообще, в любом тензоре 2-го и более высокого ранга можно выделить симметричную и антисимметричную части. Например, для тензора 2-го ранга $g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} + g_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta} - g_{\beta\alpha}) = S_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}$ где $S_{\alpha\beta}$ симметричная часть и $N_{\alpha\beta}$ антисимметричная часть тензора. Так как метрический тензор риманова пространства симметричен ($g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$), то его антисимметричная часть равна нулю.

† Мы писали эти строки в середине 1990-х годов, в первом издании этой книги. В 2007 году новый оригинальный подход к описанию частицы со спином предложил Индран Суэндро [23, 24] на основе его представлений о спине как о элемен-

После того, как нам станут известны общеквариантные динамические уравнения движения частиц с электрическим зарядом и спином, их необходимо спроецировать на время и на пространство сопутствующей системы отсчёта и выразить через физически наблюдаемые характеристики пространства отсчёта. В результате мы получим физически наблюдаемые х.и.-динамические уравнения негеодезического движения частиц. Таким образом, задача, которую нам предстоит решить в этой книге, состоит из следующих этапов. Во-первых, необходимо построить х.и.-теорию электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве и на её базе вывести х.и.-динамические уравнения движения заряженной частицы. Решению этой задачи посвящена третья глава нашей книги. Далее необходимо построить теорию движения частицы со спином. Мы будем решать эту задачу в самом общем виде, полагая спин одним из фундаментальных свойств материи (как её масса или заряд). Подробное исследование в четвёртой главе покажет, что со спином взаимодействует поле неголономности пространства, сообщая частице дополнительный импульс. Там же мы получим х.и.-динамические уравнения движения для частицы со спином. В пятой главе мы рассмотрим наблюдаемые проекции уравнений Эйнштейна. На их основе будут исследованы свойства физического вакуума и их проявления в космологии.

Но прежде чем приступить к этой работе, мы считаем необходимым изложить четырёхмерный тензорный анализ в терминах наблюдаемых физических величин. В оригинальных работах Зельманова он был разработан достаточно, но изложен фрагментарно, что не позволяло читателю, незнакомому ранее с этим математическим аппаратом, освоить его самостоятельно. Поэтому мы включили в книгу следующую главу, с которой рекомендуем ознакомиться всем, кто собирается использовать математический аппарат хронометрических инвариантов в своих теоретических исследованиях. Хотя для общего понимания книги это не строго обязательно.

тарном вихре самого пространства. Этот подход, будучи чисто геометрическим, более близок к идеологии Эйнштейна (геометризация материи и взаимодействий), чем подход через лагранжиан действия, предложенный в главе 4 этой книги.

2.1 Тензоры и тензорная алгебра

Рассмотрим некоторое пространство (необязательно метрическое) и в нем произвольную систему координат x^α . Пусть в некоторой области данного пространства существует объект G , заданный n функциями f_n от координат x^α , и известен закон преобразования, по которому можно вычислить эти n функций в любой другой системе координат \tilde{x}^α данного пространства. Тогда G представляет собой *геометрический объект*, который в системе координат x^α имеет осевые компоненты $f_n(x^\alpha)$ и в любой другой системе координат \tilde{x}^α имеет компоненты $\tilde{f}_n(\tilde{x}^\alpha)$.

Тензорным объектом (*тензором*) нулевого ранга называется геометрический объект φ , преобразующийся по закону

$$\tilde{\varphi} = \varphi \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\alpha}, \quad (2.1)$$

где индекс пробегает по очереди номера всех координатных осей (такую форму записи называют *покомпонентной*, или *тензорной*). Тензор нулевого ранга имеет всего одну компоненту и иначе называется *скаляром*. В пространстве скаляр — это точка, характеризующаяся некоторым числом. Соответственно, скалярное поле есть множество точек пространства, объединённых некоторым общим свойством. Например, масса материальной точки представляет собой скаляр, тогда как распределение массы в газе (как множество точек пространства) образует скалярное поле*.

* Алгебраически запись тензора и тензорного поля не отличаются: поле тензора записывается как и сам тензор в точке пространства, но при этом подразумевается его присутствие и в других точках данной области пространства.

Контравариантным тензором 1-го ранга называется геометрический объект A^α , компоненты которого преобразуются по закону

$$\tilde{A}^\alpha = A^\mu \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu}. \quad (2.2)$$

Геометрически это n -мерный вектор. Например, элементарный вектор смещения dx^α является контравариантным тензором 1-го ранга. Контравариантный тензор 2-го ранга $A^{\alpha\beta}$ есть геометрический объект, компоненты которого преобразуются следующим образом

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} = A^{\mu\nu} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu}. \quad (2.3)$$

Геометрически это площадка (параллелограмм), образованный двумя векторами. Поэтому контравариантный тензор 2-го ранга иногда называют *бивектором*.

Аналогично, контравариантные тензоры высшего ранга имеют следующий вид

$$\tilde{A}^{\alpha\dots\sigma} = A^{\mu\dots\tau} \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \dots \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\tau}. \quad (2.4)$$

Ковариантный тензор 1-го ранга A_α представляет собой геометрический объект, преобразующийся по закону

$$\tilde{A}_\alpha = A_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}. \quad (2.5)$$

В частности, ковариантным тензором 1-го ранга является градиент скалярного поля какого-либо инварианта, например φ , т.е. величина $A_\alpha = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$. То есть, так как для инварианта $\tilde{\varphi} = \varphi$, то

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha}. \quad (2.6)$$

Ковариантным тензором 2-го ранга $A_{\alpha\beta}$ называется геометрический объект, закон преобразования которого выглядит следующим образом

$$\tilde{A}_{\alpha\beta} = A_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta}. \quad (2.7)$$

Ковариантные тензоры высшего ранга преобразуются по закону

$$\tilde{A}_{\alpha\dots\sigma} = A_{\mu\dots\tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \dots \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma}. \quad (2.8)$$

Смешанными тензорами называют такие тензоры 2-го ранга и выше, у которых имеются и верхние и нижние индексы. Так, смешанный симметричный тензор A_{β}^{α} есть геометрический объект, преобразующийся по закону

$$\tilde{A}_{\beta}^{\alpha} = A_{\nu}^{\mu} \frac{\partial \tilde{x}^{\alpha}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\beta}}. \quad (2.9)$$

Тензорные объекты существуют как в метрических, так и в неметрических пространствах, где невозможно установить расстояние между двумя любыми точками*. Число компонент тензора равно a^n где a размерность тензора и n его ранг. Так, четырёхмерный тензор нулевого ранга имеет 1 компоненту, тензор 1-го ранга имеет 4 компоненты, у тензора 2-го ранга 16 компонент и так далее. Однако индексы, т.е. осевые компоненты, могут иметь не только тензоры, но и другие геометрические объекты. Таким образом, если мы видим какую-либо величину, записанную в покомпонентном виде, это ещё не означает, что она является тензором. Практически, чтобы узнать, является объект тензором или нет, необходимо знать выражение для данного объекта в какой-либо системе координат и преобразовать его в любую другую систему координат.

Например, являются ли тензорами коэффициенты связности пространства, т.е. символы Кристоффеля? Выяснить это можно, найдя их значения в другой (тильдованной) системе координат

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \tilde{g}^{\alpha\sigma} \tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma}, \quad \tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial \tilde{x}^{\nu}} + \frac{\partial \tilde{g}_{\nu\sigma}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} - \frac{\partial \tilde{g}_{\mu\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}} \right) \quad (2.10)$$

через значения в нетильдованной системе координат.

Фундаментальный метрический тензор, как и любой другой ковариантный тензор 2-го ранга, преобразуется по закону

$$\tilde{g}_{\mu\sigma} = g_{\varepsilon\tau} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}}. \quad (2.11)$$

* В неметрических пространствах, как известно, расстояние между точками не может быть измерено. Вернее, там просто не существует такого параметра пространства как "расстояние". Это находится в сильном противоречии с метрическими пространствами. В теориях пространства-времени-материи, таких как общая теория относительности и её расширения, мы рассматриваем метрические пространства, так как в основе всех этих теорий лежат измерения промежутков времени и отрезков пространства, что было бы просто бессмысленным в каком-либо неметрическом пространстве.

Так как $g_{\varepsilon\tau}$ зависит от нетильдованных координат, то его производная по тильдованным координатам (также функции нетильдованных координат) равна

$$\frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu}. \quad (2.12)$$

Тогда первый член в скобках (2.10) имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{g}_{\mu\sigma}}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\partial g_{\varepsilon\tau}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} + g_{\varepsilon\tau} \left(\frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\mu} + \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu \partial \tilde{x}^\sigma} \right). \quad (2.13)$$

Аналогично, вычисляя остальные члены тильдованных символов Кристоффеля (2.10), после перестановок свободных индексов получаем в тильдованной системе координат

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu,\sigma} = \Gamma_{\varepsilon\rho,\tau} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} + g_{\varepsilon\tau} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\sigma} \frac{\partial^2 x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\varepsilon\rho}^\gamma \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} + \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\gamma} \frac{\partial^2 x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu \partial \tilde{x}^\nu}. \quad (2.15)$$

Отсюда видно, что коэффициенты связности пространства (символы Кристоффеля) преобразуются не как тензоры, т.е. тензорами не являются.

Тензоры можно записывать в виде матриц. Однако на практике такая форма записи наглядна лишь для тензоров 1-го ранга (однорядные матрицы) и 2-го ранга (плоские матрицы). Например, элементарный четырёхмерный тензор смещения

$$dx^\alpha = (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3), \quad (2.16)$$

и четырёхмерный фундаментальный метрический тензор

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Тензор 3-его ранга представляет собой объёмную матрицу. Запись компонентов тензоров высших рангов в виде матриц ещё более проблематична.

Теперь перейдём к тензорной алгебре — разделу тензорного исчисления, в котором рассматриваются алгебраические операции над тензорами.

Складывать (или вычитать) можно только однотипные тензоры одного и того же ранга, у которых индексы занимают одинаковое положение. При сложении двух однотипных тензоров ранга n получается новый тензор такого же типа и ранга, компоненты которого суть сумма компонент слагаемых тензоров. Например, при сложении двух тензоров 1-го ранга мы получаем

$$A^\alpha + B^\alpha = D^\alpha, \quad A_\beta^\alpha + B_\beta^\alpha = D_\beta^\alpha. \quad (2.18)$$

Перемножать можно не только однотипные, но и вообще любые тензоры любых рангов. При внешнем умножении тензоров ранга n и m получается тензор ранга $n + m$

$$A_{\alpha\beta} B_\gamma = D_{\alpha\beta\gamma}, \quad A_\alpha B^{\beta\gamma} = D_\alpha^{\beta\gamma}. \quad (2.19)$$

Свёртыванием называется умножение тензоров одного ранга при котором индексы совпадают. В результате свёртывания тензорных величин по всем индексам получается скаляр

$$A_\alpha B^\alpha = C, \quad A_{\alpha\beta}^\gamma B_\gamma^{\alpha\beta} = D. \quad (2.20)$$

Часто при умножении тензоров свёртка происходит не по всем индексам. Такое умножение называется *внутренним*, подразумевая свёртку части индексов внутри произведения

$$A_{\alpha\sigma} B^\sigma = D_\alpha, \quad A_{\alpha\sigma}^\gamma B_\gamma^{\beta\sigma} = D_\alpha^\beta. \quad (2.21)$$

С помощью внутреннего произведения геометрических объектов можно выяснить, являются ли они тензорами или нет. Для этого существует так называемая *теорема частного*:

Теорема частного

Если $B^{\sigma\beta}$ тензор и его внутреннее произведение с некоторым геометрическим объектом $A(\alpha, \sigma)$ есть тензор D_α^β

$$A(\alpha, \sigma) B^{\sigma\beta} = D_\alpha^\beta, \quad (2.22)$$

то данный объект $A(\alpha, \sigma)$ также является тензором [12].

Согласно этой теореме, если при внутреннем умножении некоторого объекта $A_{\alpha\sigma}$ на тензор $B^{\sigma\beta}$ получается тензор $D^{\alpha\beta}$

$$A_{\alpha\sigma} B^{\sigma\beta} = D^{\alpha\beta}, \quad (2.23)$$

то объект $A_{\alpha\sigma}$ является тензором. Или, если внутреннее умножение некоторого объекта A_{σ}^{α} на тензор $B^{\sigma\beta}$ даёт тензор $D^{\alpha\beta}$

$$A_{\sigma}^{\alpha} B^{\sigma\beta} = D^{\alpha\beta}, \quad (2.24)$$

то объект A_{σ}^{α} представляет собой тензор.

Геометрические свойства метрического пространства определяются его фундаментальным метрическим тензором $g_{\alpha\beta}$, который может поднимать и опускать индексы у объектов метрического пространства*. Например,

$$g_{\alpha\beta} A^{\beta} = A_{\alpha}, \quad g^{\mu\nu} g^{\sigma\rho} A_{\mu\nu\sigma} = A^{\rho}. \quad (2.25)$$

В римановом пространстве смешанный фундаментальный метрический тензор g_{α}^{β} равен единичному тензору $g_{\alpha}^{\beta} = g_{\alpha\sigma} g^{\sigma\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$. Диагональные члены единичного тензора равны единице, а все остальные равны нулю. С помощью единичного тензора можно производить замену индексов

$$\delta_{\alpha}^{\beta} A_{\beta} = A_{\alpha}, \quad \delta_{\mu}^{\nu} \delta_{\rho}^{\sigma} A^{\mu\rho} = A^{\nu\sigma}. \quad (2.26)$$

Свёртка тензора 2-го ранга с фундаментальным метрическим тензором образует скаляр, который называют *следом тензора*

$$g^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} = A_{\sigma}^{\sigma}. \quad (2.27)$$

Например, след фундаментального метрического тензора четырёхмерного риманова пространства

$$g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = g_{\sigma}^{\sigma} = g_0^0 + g_1^1 + g_2^2 + g_3^3 = \delta_0^0 + \delta_1^1 + \delta_2^2 + \delta_3^3 = 4 \quad (2.28)$$

равен числу координатных осей.

*В римановом пространстве метрика имеет квадратичную форму, имеющую вид $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$ (риманова метрическая форма), и, соответственно, метрический тензор является тензором 2-го ранга $g_{\alpha\beta}$.

Физический наблюдаемый метрический тензор h_{ik} (1.27) в трёхмерном пространстве обладает свойствами фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Поэтому с его помощью можно поднимать, опускать и производить замену индексов у х.и.-величин. В частности, можно вычислять квадраты трёхмерных векторов. Соответственно, след трёхмерного тензора образуется путём его свёртки с наблюдаемым метрическим тензором. Так след тензора скоростей деформации пространства D_{ik} (1.40) есть скаляр

$$h^{ik} D_{ik} = D_m^m, \quad (2.29)$$

обозначающий абсолютную величину скорости относительного расширения элементарного объёма пространства.

Конечно, в таком кратком очерке как эта глава невозможно полностью изложить такой обширный предмет, как алгебра тензоров. Впрочем, в этом и нет необходимости. Тензорная алгебра достаточно подробно описана во многих чисто математических изданиях, не связанных с общей теорией относительности. Тем не менее множество специфических подробностей этого предмета, занимающих большую часть математических учебников, в теоретической физике не используются. Поэтому мы стремились дать только общее представление о тензорах, необходимое для работы с этой книгой, посвящённой исключительно общей теории относительности. По этой же причине сюда не вошли, в частности, вес тензоров и другие понятия, которые в дальнейших расчётах не использовались.

2.2 Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов A^α и B^α в четырёхмерном псевдоримановом пространстве называется величина

$$g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A_\alpha B^\alpha = A_0 B^0 + A_i B^i. \quad (2.30)$$

Скалярное произведение является свёрткой, так как при умножении векторов одновременно происходит свёртывание всех индексов. Поэтому в результате скалярного умножения двух векторов (тензоров 1-го ранга) всегда получается скаляр (тензор нулевого ранга). Если векторы совпадают, то их скалярное произведение

$$g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = A_\alpha A^\alpha = A_0 A^0 + A_i A^i \quad (2.31)$$

представляет собой квадрат вектора A^α . Тогда длина вектора A^α есть скаляр

$$A = |A^\alpha| = \sqrt{g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta}. \quad (2.32)$$

Так как четырёхмерное псевдориманово пространство имеет знакопеременную сигнатуру, то длина четырёхмерного вектора может быть вещественной, мнимой и нулевой. Векторы ненулевой (вещественной или мнимой) длины называют *неизотропными*. Векторы нулевой длины называют *изотропными*. Изотропные векторы касательны к траекториям распространения светоподобных частиц (изотропным траекториям).

В трёхмерном евклидовом пространстве скалярное произведение двух векторов есть скаляр, величина которого равна произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$A_i B^i = |A^i| |B^i| \cos(A^i; B^i). \quad (2.33)$$

В принципе, в каждой точке риманова пространства можно построить касательное плоское пространство, базисные векторы которого будут касательны базисным векторам риманова пространства в точке касания. Тогда метрика касательного плоского пространства будет метрикой риманова пространства в этой точке. Поэтому данная формула справедлива и в римановом пространстве, если рассмотреть угол между координатными линиями и заменить латинские (трёхмерные) индексы на греческие.

Отсюда видно, что скалярное произведение двух векторов равно нулю, когда векторы взаимно ортогональны. Иначе говоря, скалярное умножение геометрически представляет собой проецирование одного вектора на другой. Если же векторы совпадают, то вектор проецируется сам на себя, а результат такого проецирования есть квадрат его длины.

Обозначим физически наблюдаемые компоненты векторов A^α и B^α следующим образом

$$a = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad a^i = A^i, \quad (2.34)$$

$$b = \frac{B_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad b^i = B^i, \quad (2.35)$$

тогда их остальные компоненты принимают вид

$$A^0 = \frac{a + \frac{1}{c} v_i a^i}{1 - \frac{w}{c^2}}, \quad A_i = -a_i - \frac{a}{c} v_i, \quad (2.36)$$

$$B^0 = \frac{b + \frac{1}{c} v_i b^i}{1 - \frac{w}{c^2}}, \quad B_i = -b_i - \frac{b}{c} v_i. \quad (2.37)$$

Подставляя значения наблюдаемых компонент в выражения для $A_\alpha B^\alpha$ и $A_\alpha A^\alpha$, получаем

$$A_\alpha B^\alpha = ab - a_i b^i = ab - h_{ik} a^i b^k, \quad (2.38)$$

$$A_\alpha A^\alpha = a^2 - a_i a^i = a^2 - h_{ik} a^i a^k. \quad (2.39)$$

Из этих выражений видно, что квадрат длины вектора есть разность квадратов длин его проекций на время и на пространство. При этом длина вектора является вещественной или мнимой в зависимости от того, какая из проекций “длиннее”. Если же обе проекции равны, то длина вектора равна нулю и он является изотропным. Таким образом, изотропный вектор в равной мере принадлежит и времени и пространству. Равенство временной и пространственной проекций также означает, что вектор ортогонален самому себе. Если “длиннее” временная проекция, то он становится вещественным. Если “длиннее” проекция на пространство, то вектор становится мнимым.

В качестве примера скалярного произведения четырёхмерного вектора на самого себя можно привести квадрат длины пространственно-временного интервала

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx_\alpha dx^\alpha = dx_0 dx^0 + dx_i dx^i. \quad (2.40)$$

В терминах физических наблюдаемых величин его можно записать следующим образом

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dx_i dx^i = c^2 d\tau^2 - h_{ik} dx^i dx^k = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \quad (2.41)$$

Длина интервала $ds = \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}$ получается вещественной, мнимой или нулевой в зависимости от того, является ли ds времени-подобным $c^2 d\tau^2 > d\sigma^2$, пространственноподобным $c^2 d\tau^2 < d\sigma^2$ или изотропным $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2$ (светоподобные траектории).

2.3 Векторное произведение векторов. Антисимметричные тензоры и псевдотензоры

Векторным произведением двух векторов A^α и B^α называется тензор 2-го ранга $V^{\alpha\beta}$, получающийся в результате их внешнего умножения по правилу

$$V^{\alpha\beta} = [A^\alpha; B^\beta] = \frac{1}{2} (A^\alpha B^\beta - A^\beta B^\alpha) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} A^\alpha & A^\beta \\ B^\alpha & B^\beta \end{vmatrix}. \quad (2.42)$$

Как видите, здесь не всё равно, в какой последовательности подставлять перемножаемые векторы, т.е. имеет значение последовательность записи тензорных индексов. Поэтому тензоры, образованные в результате векторного умножения, являются *антисимметричными тензорами*. Для любого антисимметричного тензора $V^{\alpha\beta} = -V^{\beta\alpha}$ и индексы при перемещении как бы оставляют за собой “зарезервированные” места в виде точек $g_{\alpha\sigma} V^{\sigma\beta} = V_{\alpha}^{\cdot\beta}$, показывая тем самым, откуда был перемещён тот или иной индекс. У симметричных тензоров “резервировать” места передвигаемых индексов нет необходимости, так как их последовательность значения не имеет. В частности, фундаментальный метрический тензор является симметричным тензором $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$, тогда как тензор кривизны пространства $R_{\cdot\beta\gamma\delta}^{\alpha\cdots}$ симметричен относительно перестановок по парам индексов и антисимметричен внутри каждой пары индексов. Естественно, что симметричными или антисимметричными могут быть тензоры, начиная со 2-го ранга и выше.

Все диагональные компоненты любого антисимметричного тензора равны нулю, например

$$V^{\alpha\alpha} = [A^\alpha; B^\alpha] = \frac{1}{2} (A^\alpha B^\alpha - A^\alpha B^\alpha) = 0. \quad (2.43)$$

В трёхмерном евклидовом пространстве абсолютная величина векторного произведения двух векторов определяется как площадь образованного ими параллелограмма и равна произведению модулей образующихся векторов на синус угла между ними

$$V^{ik} = |A^i| |B^k| \sin(A^i; B^k). \quad (2.44)$$

Это означает, что векторное произведение двух векторов (антисимметричный тензор 2-го ранга) представляет собой ориентированную в пространстве площадку, ориентация которой задаётся

направлением обхода образующих векторов. Свёртка антисимметричного тензора с любым симметричным тензором равна нулю

$$V_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = V_{00} A^0 A^0 + V_{0i} A^0 A^i + V_{i0} A^i A^0 + V_{ik} A^i A^k = 0 \quad (2.45)$$

из-за его свойства антисимметричности.

Физически наблюдаемыми компонентами антисимметричного тензора 2-го ранга $V^{\alpha\beta}$, согласно теории хронометрических инвариантов (1.32), являются величины

$$\frac{V_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}} = -\frac{V_{\cdot 0}^{i\cdot}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{2} (ab^i - ba^i), \quad (2.46)$$

$$V^{ik} = \frac{1}{2} (a^i b^k - a^k b^i), \quad (2.47)$$

выраженные через наблюдаемые компоненты образующих его векторов A^α (2.34) и B^α (2.35). Из-за того, что у антисимметричного тензора диагональные компоненты равны нулю, третья наблюдаемая компонента $\frac{V_{00}}{g_{00}}$ (1.32) также равна нулю.

Наблюдаемые компоненты V^{ik} , являющиеся пространственными проекциями $V^{\alpha\beta}$, это аналоги векторного произведения векторов в трёхмерном пространстве. Величина $\frac{V_{0\cdot}^{\cdot i}}{\sqrt{g_{00}}}$, представляющая собой пространственно-временную (смешанную) проекцию тензора $V^{\alpha\beta}$, не имеет аналогов среди компонент обычного трёхмерного векторного произведения.

Квадрат антисимметричного тензора 2-го ранга, выраженный через наблюдаемые компоненты образующих векторов, выглядит следующим образом

$$V_{\alpha\beta} V^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_i a^i b_k b^k - a_i b^i a_k b^k) + ab a_i b^i - \frac{1}{2} (a^2 b_i b^i - b^2 a_i a^i). \quad (2.48)$$

Последние два члена этого выражения содержат величины a (2.34) и b (2.35), представляющие собой проекции перемножаемых векторов A^α и B^α на время, и, поэтому, не имеют аналогов при векторном умножении в трёхмерном евклидовом пространстве.

Антисимметричность тензорного поля характеризуется эталон-

ным антисимметричным тензором. В галилеевой системе отсчёта* такими эталонами являются тензоры Леви-Чивиты: для четырёхмерных величин это *четырёхмерный совершенно антисимметричный единичный тензор* $e^{\alpha\beta\mu\nu}$, и для трёхмерных величин *трёхмерный совершенно антисимметричный единичный тензор* e^{ikm} . Компоненты этих тензоров, у которых все индексы различны, равны +1 или -1 в зависимости от числа перестановок индексов. Все остальные компоненты, т.е. такие, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю. Причём при используемой нами сигнатуре (+---) не равные нулю контравариантные компоненты отличаются по знаку от соответствующих им ковариантных компонент†. Так, например, в пространстве Минковского

$$\left. \begin{aligned} g_{\alpha\sigma} g_{\beta\rho} g_{\mu\tau} g_{\nu\gamma} e^{\sigma\rho\tau\gamma} &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} e^{0123} = -e^{0123} \\ g_{i\alpha} g_{k\beta} g_{m\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} &= g_{11} g_{22} g_{33} e^{123} = -e^{123} \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

из-за условий $g_{00} = 1$ и $g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1$. Вот компоненты четырёхмерного совершенно антисимметричного тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$

$$\left. \begin{aligned} e^{0123} &= +1, & e^{1023} &= -1, & e^{1203} &= +1, & e^{1230} &= -1 \\ e_{0123} &= -1, & e_{1023} &= +1, & e_{1203} &= -1, & e_{1230} &= +1 \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

и трёхмерного совершенно антисимметричного тензора e^{ikm}

$$\left. \begin{aligned} e^{123} &= +1, & e^{213} &= -1, & e^{231} &= +1 \\ e_{123} &= -1, & e_{213} &= +1, & e_{231} &= -1 \end{aligned} \right\}. \quad (2.51)$$

Так как выбор знака первой компоненты произволен (важна только совершенная антисимметричность тензора), то вполне можно положить $e^{0123} = -1$ и $e^{123} = -1$. Соответственно, изменятся и остальные компоненты. Вообще четырёхмерный тензор $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ связан с трёхмерным тензором e^{ikm} соотношением $e^{0ikm} = e^{ikm}$.

*Галилеева система отсчёта — такая, которая не вращается, не деформируется и свободно падает в плоском пространстве-времени (пространстве Минковского). Нетрудно убедиться, что в этом случае линии времени прямолинейны и трёхмерные координатные оси также прямолинейны.

†При сигнатуре (-+++), это справедливо только для четырёхмерного тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$. Компоненты трёхмерного тензора e^{ikm} будут аналогичны по знаку соответствующим компонентам e_{ikm} .

При умножении четырёхмерного антисимметричного единичного тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ на самого себя получается обычный тензор 8-го ранга, не равные нулю компоненты которого имеют вид

$$e^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\sigma\tau\rho\gamma} = - \begin{pmatrix} \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\tau}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\alpha} & \delta_{\gamma}^{\alpha} \\ \delta_{\sigma}^{\beta} & \delta_{\tau}^{\beta} & \delta_{\rho}^{\beta} & \delta_{\gamma}^{\beta} \\ \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\tau}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\mu} & \delta_{\gamma}^{\mu} \\ \delta_{\sigma}^{\nu} & \delta_{\tau}^{\nu} & \delta_{\rho}^{\nu} & \delta_{\gamma}^{\nu} \end{pmatrix}. \quad (2.52)$$

Остальные свойства тензора $e^{\alpha\beta\mu\nu}$ получаются из предыдущего путём упрощения (свёртки) индексов

$$e^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\sigma\tau\rho\nu} = - \begin{pmatrix} \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\tau}^{\alpha} & \delta_{\rho}^{\alpha} \\ \delta_{\sigma}^{\beta} & \delta_{\tau}^{\beta} & \delta_{\rho}^{\beta} \\ \delta_{\sigma}^{\mu} & \delta_{\tau}^{\mu} & \delta_{\rho}^{\mu} \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

$$e^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\sigma\tau\mu\nu} = -2 \begin{pmatrix} \delta_{\sigma}^{\alpha} & \delta_{\tau}^{\alpha} \\ \delta_{\sigma}^{\beta} & \delta_{\tau}^{\beta} \end{pmatrix} = -2 (\delta_{\sigma}^{\alpha} \delta_{\tau}^{\beta} - \delta_{\sigma}^{\beta} \delta_{\tau}^{\alpha}), \quad (2.54)$$

$$e^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\sigma\beta\mu\nu} = -6 \delta_{\sigma}^{\alpha}, \quad e^{\alpha\beta\mu\nu} e_{\alpha\beta\mu\nu} = -6 \delta_{\alpha}^{\alpha} = -24. \quad (2.55)$$

При умножении трёхмерного антисимметричного единичного тензора e^{ikm} на самого себя получается обыкновенный тензор 6-го ранга, выглядящий следующим образом

$$e^{ikm} e_{rst} = \begin{pmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i & \delta_t^i \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_r^m & \delta_s^m & \delta_t^m \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Остальные свойства тензора e^{ikm} можно записать следующим образом

$$e^{ikm} e_{rsm} = - \begin{pmatrix} \delta_r^i & \delta_s^i \\ \delta_r^k & \delta_s^k \end{pmatrix} = \delta_s^i \delta_r^k - \delta_r^i \delta_s^k, \quad (2.57)$$

$$e^{ikm} e_{rkm} = 2 \delta_r^i, \quad e^{ikm} e_{ikm} = 2 \delta_i^i = 6. \quad (2.58)$$

Совершенно антисимметричный единичный тензор определяет для тензорного объекта соответствующий *псевдотензор*, обозначаемый звёздочкой. Так, четырёхмерным скаляру, вектору и тензорам

2-го, 3-го и 4-го рангов соответствуют четырёхмерные псевдотензоры следующих рангов

$$\left. \begin{aligned} V^{*\alpha\beta\mu\nu} &= e^{\alpha\beta\mu\nu} V, & V^{*\alpha\beta\mu} &= e^{\alpha\beta\mu\nu} V_\nu \\ V^{*\alpha\beta} &= \frac{1}{2} e^{\alpha\beta\mu\nu} V_{\mu\nu}, & V^{*\alpha} &= \frac{1}{6} e^{\alpha\beta\mu\nu} V_{\beta\mu\nu} \\ V^* &= \frac{1}{24} e^{\alpha\beta\mu\nu} V_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \right\}, \quad (2.59)$$

где псевдотензор 1-го ранга $V^{*\alpha}$ иногда называют *псевдовектором*, а псевдотензор нулевого ранга V^* называют *псевдоскаляром* (по аналогии с обычными вектором и скаляром). При этом тензор и соответствующий ему псевдотензор называются *дуальными* друг другу, подчёркивая тем самым их генетическое родство. Аналогично, трёхмерным тензорам соответствуют трёхмерные псевдотензоры

$$\left. \begin{aligned} V^{*ikm} &= e^{ikm} V, & V^{*ik} &= e^{ikm} V_m \\ V^{*i} &= \frac{1}{2} e^{ikm} V_{km}, & V^* &= \frac{1}{6} e^{ikm} V_{ikm} \end{aligned} \right\}. \quad (2.60)$$

Псевдотензоры получили своё название из-за того, что они, в отличие от обычных тензоров, при отражении относительно одной из осей не меняются. Например, при отражении относительно оси абсцисс $x^1 = -\tilde{x}^1$, $x^2 = \tilde{x}^2$, $x^3 = \tilde{x}^3$, компонента антисимметричного тензора V_{ik} , ортогональная оси x^1 , равна $\tilde{V}_{23} = -V_{23}$, тогда как дуальная ей компонента псевдовектора V^{*i} получается равной

$$\left. \begin{aligned} V^{*1} &= \frac{1}{2} e^{1km} V_{km} = \frac{1}{2} (e^{123} V_{23} + e^{132} V_{32}) = V_{23} \\ \tilde{V}^{*1} &= \frac{1}{2} \tilde{e}^{1km} \tilde{V}_{km} = \frac{1}{2} e^{k1m} \tilde{V}_{km} = \\ &= \frac{1}{2} (e^{213} \tilde{V}_{23} + e^{312} \tilde{V}_{32}) = V_{23} \end{aligned} \right\}. \quad (2.61)$$

Так как четырёхмерный антисимметричный тензор 2-го ранга и дуальный ему псевдовектор имеют один и тот же ранг, то их свёртка есть псевдоскаляр

$$V_{\alpha\beta} V^{*\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} e^{\alpha\beta\mu\nu} V_{\mu\nu} = e^{\alpha\beta\mu\nu} B_{\alpha\beta\mu\nu} = B^*. \quad (2.62)$$

Квадрат четырёхмерного псевдотензора 2-го ранга $V^{*\alpha\beta}$ и квадрат трёхмерного псевдовектора V^{*i} , выраженные через дуальные им антисимметричные тензоры 2-го ранга, равны

$$V_{*\alpha\beta}V^{*\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\mu\nu}V^{\mu\nu}e^{\alpha\beta\rho\sigma}V_{\rho\sigma} = -24V_{\mu\nu}V^{\mu\nu}, \quad (2.63)$$

$$V_{*i}V^{*i} = e_{ikm}V^{km}e^{ipq}V_{pq} = 6V_{km}V^{km}. \quad (2.64)$$

В неоднородном и анизотропном псевдоримановом пространстве невозможно ввести галилееву систему отсчёта и эталон антисимметричности тензорного поля будет зависеть от неоднородности и анизотропии самого пространства, устанавливаемых фундаментальным метрическим тензором. В этом случае эталонный антисимметричный тензор представляет собой *четырёхмерный совершенно антисимметричный дискриминантный тензор*

$$E^{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{e^{\alpha\beta\mu\nu}}{\sqrt{-g}}, \quad E_{\alpha\beta\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{-g}. \quad (2.65)$$

Показать это можно следующим образом. Преобразование единичного совершенно антисимметричного тензора из галилеевой (нетильдованной) системы отсчёта в произвольную (тильдованную) систему отсчёта имеет вид

$$\tilde{e}_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \tilde{x}^\beta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\tau}{\partial \tilde{x}^\nu} e_{\sigma\gamma\varepsilon\tau} = J e_{\alpha\beta\mu\nu}, \quad (2.66)$$

где $J = \det \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\sigma} \right\|$ называется *якобианом преобразования* (определитель матрицы Якоби — матрицы, составленной из производных нетильдованных координат по тильдованным координатам)

$$J = \det \left\| \frac{\partial x^\alpha}{\partial \tilde{x}^\sigma} \right\| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \tilde{x}^3} \\ \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^0} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^3} \end{pmatrix}. \quad (2.67)$$

Так как тензор $g_{\alpha\beta}$ преобразуется по закону

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\mu\nu}, \quad (2.68)$$

то его определитель в тильдованной системе отсчёта

$$\tilde{g} = \det \left\| \left\| \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\beta} g_{\mu\nu} \right\| \right\| = J^2 g. \quad (2.69)$$

Поскольку в галилеевой (нетильдованной) системе отсчёта

$$g = \det \| g_{\alpha\beta} \| = \det \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\| = -1, \quad (2.70)$$

то $J^2 = -\tilde{g}^2$. Обозначая $\tilde{e}_{\alpha\beta\mu\nu}$ в произвольной системе отсчёта как $E_{\alpha\beta\mu\nu}$ и записывая метрический тензор в обычном нетильдованном виде, получаем $E_{\alpha\beta\mu\nu} = e_{\alpha\beta\mu\nu} \sqrt{-g}$ (2.65). Точно так же получаются преобразования и для компонент $E^{\alpha\beta\mu\nu}$, так как для них $g = \tilde{g} \tilde{J}^2$, где $\tilde{J} = \det \left\| \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\sigma} \right\|$.

Однако дискриминантный тензор $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ не является физически наблюдаемой величиной. Наблюдаемым эталоном антисимметричности тензорных полей в псевдоримановом пространстве является *трёхмерный х.и.-дискриминантный тензор*

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = h_\mu^\alpha h_\nu^\beta h_\rho^\gamma b_\sigma E^{\sigma\mu\nu\rho} = b_\sigma E^{\sigma\alpha\beta\gamma}, \quad (2.71)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu h_\gamma^\rho b^\sigma E_{\sigma\mu\nu\rho} = b^\sigma E_{\sigma\alpha\beta\gamma}, \quad (2.72)$$

который в сопутствующей системе отсчёта ($b^i = 0$) с учётом соотношения $\sqrt{-g} = \sqrt{h} \sqrt{g_{00}}$ принимает вид

$$\varepsilon^{ikm} = b_0 E^{0ikm} = \sqrt{g_{00}} E^{0ikm} = \frac{e^{ikm}}{\sqrt{h}}, \quad (2.73)$$

$$\varepsilon_{ikm} = b^0 E_{0ikm} = \frac{E_{0ikm}}{\sqrt{g_{00}}} = e_{ikm} \sqrt{h}. \quad (2.74)$$

С его помощью можно образовывать физически наблюдаемые х.и.-псевдотензоры. Например, свёртка ε^{ikm} и трёхмерного х.и.-антисимметричного тензора угловой скорости вращения пространства A_{ik} (1.36) есть наблюдаемый х.и.-псевдовектор угловой скорости вращения пространства $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikm} A_{km}$.

2.4 Абсолютный дифференциал и производная по направлению

В геометрии *дифференциалом* какой-либо функции называется её приращение в бесконечно близких точках с координатами x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$. *Абсолютным дифференциалом* в пространстве n измерений называют приращение n -мерной величины в бесконечно близких точках n -мерных координат данного пространства.

Приращения непрерывных функций, с которыми, как правило, мы имеем дело на практике, в бесконечно близких точках являются бесконечно малыми. Однако для определения бесконечно малого приращения тензорной величины не может быть использовано понятие “разности” между её значениями в точках x^α и $x^\alpha + dx^\alpha$, так как тензорная алгебра не определяет соотношения между значениями тензора в различных точках пространства. Это соотношение может быть установлено только с помощью законов преобразования тензоров из одной системы отсчёта в другую. Поэтому, в частности, дифференциальные операторы и результаты применения их к тензорам сами также должны быть тензорами. Так, абсолютный дифференциал от какой-либо тензорной величины является тензором того же ранга, что и эта величина.

Абсолютный дифференциал от скаляра φ есть скаляр

$$D\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha} dx^\alpha, \quad (2.75)$$

в сопутствующей системе отсчёта ($b^i = 0$) он принимает вид

$$D\varphi = \frac{* \partial\varphi}{\partial t} d\tau + \frac{* \partial\varphi}{\partial x^i} dx^i, \quad (2.76)$$

откуда видно, что, кроме трёхмерного наблюдаемого дифференциала, здесь присутствует добавочный член, учитывающий зависимость абсолютного смещения $D\varphi$ от хода физического наблюдаемого времени $d\tau$.

Абсолютный дифференциал контравариантного вектора A^α , выраженный через оператор абсолютного дифференцирования ∇ (называемый “набла”), имеет вид

$$\begin{aligned} DA^\alpha &= \nabla_\sigma A^\alpha dx^\sigma = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma} dx^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha A^\mu dx^\sigma = \\ &= dA^\alpha + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha A^\mu dx^\sigma, \end{aligned} \quad (2.77)$$

где $\nabla_\sigma A^\alpha$ абсолютная производная A^α по координате x^σ , и d обозначает обычный дифференциал

$$\nabla_\sigma A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha A^\mu, \quad (2.78)$$

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} dx^\alpha. \quad (2.79)$$

Выражение абсолютного дифференциала через физически наблюдаемые величины эквивалентно проецированию его общековариантной формы на линии времени и пространственное сечение наблюдателя в сопутствующей системе отсчёта

$$T = b_\alpha DA^\alpha = \frac{g_{0\alpha} DA^\alpha}{\sqrt{g_{00}}}, \quad B^i = h_\alpha^i DA^\alpha. \quad (2.80)$$

Обозначив наблюдаемые компоненты вектора A^α как

$$\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad q^i = A^i, \quad (2.81)$$

получаем его остальные компоненты

$$A_0 = \varphi \left(1 - \frac{w}{c^2}\right), \quad A^0 = \frac{\varphi + \frac{1}{c} v_i q^i}{1 - \frac{w}{c^2}}, \quad A_i = -q_i - \frac{\varphi}{c} v_i. \quad (2.82)$$

Учитывая, что обычный дифференциал в х.и.-форме, т.е. выраженный через х.и.-величины, имеет вид

$$d = \frac{*}{\partial t} d\tau + \frac{*}{\partial x^i} dx^i, \quad (2.83)$$

и подставляя в T и B^i (2.80) символы Кристоффеля в х.и.-виде (1.41–1.46), получаем наблюдаемые х.и.-проекции на время и на пространство абсолютного дифференциала вектора A^α

$$T = b_\alpha DA^\alpha = d\varphi + \frac{1}{c} \left(-F_i q^i d\tau + D_{ik} q^i dx^k \right), \quad (2.84)$$

$$B^i = h_\sigma^i DA^\sigma = dq^i + \left(\frac{\varphi}{c} dx^k + q^k d\tau \right) \left(D_k^i + A_k^i \right) - \frac{\varphi}{c} F^i d\tau + \Delta_{mk}^i q^m dx^k. \quad (2.85)$$

В дальнейшем при построении уравнений движения нам также понадобятся х.и.-уравнения абсолютной производной вектора вдоль направления, касательного к траектории движения. Геометрически *производная по направлению* от некоторой функции есть её изменение по отношению к элементарному перемещению вдоль заданного направления. *Абсолютной производной по направлению* в пространстве n измерений называют изменение n -мерной величины относительно элементарного n -мерного интервала вдоль заданного направления.

Так, абсолютная производная скалярной функции φ вдоль направления, определяемого кривой $x^\alpha = x^\alpha(\rho)$, где ρ параметр дифференцирования вдоль данной кривой представляет собой “скорость” изменения данной функции

$$\frac{D\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho}. \quad (2.86)$$

В сопутствующей системе отсчёта она принимает вид

$$\frac{D\varphi}{d\rho} = \frac{*}{dt} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \frac{d\tau}{d\rho} + \frac{*}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\rho}. \quad (2.87)$$

Абсолютная производная вектора A^α вдоль направления, заданного кривой $x^\alpha = x^\alpha(\rho)$, равна

$$\frac{DA^\alpha}{d\rho} = \nabla_\sigma A^\alpha \frac{dx^\sigma}{d\rho} = \frac{dA^\alpha}{d\rho} + \Gamma_{\mu\sigma}^\alpha A^\mu \frac{dx^\sigma}{d\rho}. \quad (2.88)$$

Физически наблюдаемые компоненты величины $\frac{DA^\alpha}{d\rho}$, т.е. проекции её на время и на пространство в сопутствующей системе отсчёта, имеют вид

$$b_\alpha \frac{DA^\alpha}{d\rho} = \frac{d\varphi}{d\rho} + \frac{1}{c} \left(-F_i q^i \frac{d\tau}{d\rho} + D_{ik} q^i \frac{dx^k}{d\rho} \right), \quad (2.89)$$

$$h_\sigma^i \frac{DA^\sigma}{d\rho} = \frac{dq^i}{d\rho} + \left(\frac{\varphi}{c} \frac{dx^k}{d\rho} + q^k \frac{d\tau}{d\rho} \right) (D_k^i + A_k^i) - \frac{\varphi}{c} F^i \frac{d\tau}{d\rho} + \Delta_{mk}^i q^m \frac{dx^k}{d\rho}. \quad (2.90)$$

Фактически эти проекции представляют собой “отвлечённые” х.и.-уравнения движения. Стоит нам только определить её наблю-

даемые компоненты и, подставив их в данные уравнения, привести подобные члены, как мы сразу получим уравнения движения, выраженные через физически наблюдаемые величины.

2.5 Абсолютная дивергенция и ротор

Дивергенцией какого-либо тензорного поля называется его “перепад” в направлении координатных осей. Соответственно, *абсолютной дивергенцией* n -мерного тензорного поля называется его дивергенция в n -мерном пространстве. Дивергенция есть результат свёртывания тензора поля с оператором абсолютного дифференцирования набла ∇ . Дивергенция векторного поля есть скаляр

$$\nabla_{\sigma} A^{\sigma} = \frac{\partial A^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} A^{\mu}. \quad (2.91)$$

Дивергенция поля тензора 2-го ранга является вектором и имеет следующий вид

$$\nabla_{\sigma} F^{\sigma\alpha} = \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} F^{\alpha\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\alpha} F^{\sigma\mu}, \quad (2.92)$$

причём можно показать, что величина $\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma}$ имеет вид

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.93)$$

Для этого воспользуемся определением символов Кристоффеля и запишем величину $\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma}$ подробно

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} = g^{\sigma\rho} \Gamma_{\mu\sigma,\rho} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} \left(\frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\rho}} \right). \quad (2.94)$$

Так как здесь σ и ρ свободные индексы, то их можно поменять местами. В результате этого после свёртки с тензором $g^{\rho\sigma}$ первый и последний члены взаимно уничтожаются, и $\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma}$ принимает вид

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.95)$$

Величины $g^{\rho\sigma}$ суть компоненты тензора, обратного тензору $g_{\rho\sigma}$. Поэтому каждая компонента матрицы $g^{\rho\sigma}$ равна

$$g^{\rho\sigma} = \frac{a^{\rho\sigma}}{g}, \quad g = \det \|g_{\rho\sigma}\|, \quad (2.96)$$

где $a^{\rho\sigma}$ алгебраическое дополнение элемента матрицы с индексами $\rho\sigma$, равное числу $(-1)^{\rho+\sigma}$, умноженному на детерминант (т.е. определитель) матрицы, получаемой вычёркиванием σ и ρ из матрицы $g_{\rho\sigma}$. В результате мы имеем $a^{\rho\sigma} = g g^{\rho\sigma}$. Так как определитель $g = \det \|g_{\rho\sigma}\|$ по определению равен

$$g = \sum_{\alpha_0 \dots \alpha_3} (-1)^{N(\alpha_0 \dots \alpha_3)} g_{0(\alpha_0)} g_{1(\alpha_1)} g_{2(\alpha_2)} g_{3(\alpha_3)}, \quad (2.97)$$

то величина dg примет вид $dg = a^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma} = g g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}$, или

$$\frac{dg}{g} = g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma}. \quad (2.98)$$

Интегрируя левую часть, получаем $\ln(-g)$, так как определитель g отрицателен, а логарифм существует только для положительной функции. Тогда $d \ln(-g) = \frac{dg}{g}$. Учитывая, что $(-g)^{1/2} = \frac{1}{2} \ln(-g)$, получаем

$$d \ln \sqrt{-g} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} dg_{\rho\sigma} \quad (2.99)$$

и $\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma}$ (2.95) принимает вид

$$\Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^{\mu}}, \quad (2.100)$$

что и требовалось показать (2.93).

Теперь вычислим физически наблюдаемые компоненты дивергенции векторного поля (2.91) и поля тензора 2-го ранга (2.92). Выражение для дивергенции векторного поля A^{α} есть скаляр, поэтому величину $\nabla_{\sigma} A^{\sigma}$ нельзя спроецировать на время и на пространство, достаточно только выразить её через физически наблюдаемые х.и.-компоненты A^{α} и через наблюдаемые характеристики пространства отсчёта. Кроме того, обычные операторы дифференцирования следует заменить на х.и.-операторы дифференцирования.

Примем обозначения φ и q^i для наблюдаемых компонент вектора A^{α} (2.81) и выразим через них остальные компоненты (2.82). Тогда, подставляя в (2.91) обычные операторы дифференцирования, выраженные через х.и.-операторы

$$\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{* \partial}{\partial t}, \quad \sqrt{g_{00}} = 1 - \frac{w}{c^2}, \quad (2.101)$$

$$\frac{*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{1}{c^2} v_i \frac{*\partial}{\partial t}, \quad (2.102)$$

и учитывая, что $\sqrt{-g} = \sqrt{h} \sqrt{g_{00}}$, после вычислений получаем

$$\nabla_{\sigma} A^{\sigma} = \frac{1}{c} \left(\frac{*\partial \varphi}{\partial t} + \varphi D \right) + \frac{*\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \frac{*\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} F_i q^i. \quad (2.103)$$

Величина

$$\frac{*\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} = \Delta_{ji}^j \quad (2.104)$$

представляет собой х.и.-символы Кристоффеля Δ_{ji}^k (1.47), свёрнутые по двум индексам. Тогда, аналогично определению абсолютной дивергенции векторного поля (2.91), величина

$$\frac{*\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \frac{*\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} = \frac{*\partial q^i}{\partial x^i} + q^i \Delta_{ji}^j = *\nabla_i q^i \quad (2.105)$$

есть х.и.-дивергенция вектора q^i .

Соответственно, назовём *физической х.и.-дивергенцией* вектора q^i х.и.-величину

$$*\tilde{\nabla}_i q^i = *\nabla_i q^i - \frac{1}{c^2} F_i q^i, \quad (2.106)$$

в которой дополнительный член учитывает тот факт, что темп течения времени на противоположных стенках элементарного объёма различен.

Действительно, при вычислении дивергенции берётся элементарный объём пространства и вычисляется разность между объёмами “субстанции”, входящей в него за элементарный промежуток времени и выходящей из него за этот же временной интервал (дивергенция означает расходимость). Но наличие гравитационно-инерциальной силы F^i (1.38) приводит к тому, что темп времени в разных точках пространства различен. Поэтому, если измерить длительность промежутков времени на противоположных стенках объёма, то начало и конец этих промежутков на разных стенках объёма получаются несинхронными и их нельзя будет сравнить. При синхронизации часов на противоположных стенках объёма получится истинная картина, т.е. измеренная длительность этих промежутков времени окажется различной.

Окончательное выражение для $\nabla_\sigma A^\sigma$ примет вид

$$\nabla_\sigma A^\sigma = \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial t} + \varphi D \right) + * \widetilde{\nabla}_i q^i. \quad (2.107)$$

Второй член этого выражения представляет собой физически наблюдаемый аналог обычной дивергенции в трёхмерном пространстве. Первый член не имеет аналогов и состоит из двух частей: $\frac{* \partial \varphi}{\partial t}$ есть изменение во времени временной проекции φ четырёхмерного вектора A^α , величина φD является изменением во времени объёма трёхмерного тензорного поля q^i , так как след тензора скоростей деформации $D = h^{ik} D_{ik} = D_n^n$ есть скорость относительного расширения элементарного объёма пространства отсчёта.

Равенство $\nabla_\sigma A^\sigma = 0$, применённое к четырёхмерному вектор-потенциалу A^α электромагнитного поля, есть условие Лоренца. В х.и.-виде условие Лоренца выглядит следующим образом

$$* \widetilde{\nabla}_i q^i = - \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial t} + \varphi D \right). \quad (2.108)$$

Теперь вычислим физически наблюдаемые компоненты дивергенции произвольного антисимметричного тензора $F^{\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}$ (эти формулы пригодятся нам для построения х.и.-электродинамики, при выводе х.и.-уравнений Максвелла)

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} &= \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu}^\sigma F^{\alpha\mu} + \Gamma_{\sigma\mu}^\alpha F^{\sigma\mu} = \\ &= \frac{\partial F^{\sigma\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^\mu} F^{\alpha\mu}, \end{aligned} \quad (2.109)$$

где третий член $\Gamma_{\sigma\mu}^\alpha F^{\sigma\mu}$ равен нулю из-за свёртывания символов Кристоффеля $\Gamma_{\sigma\mu}^\alpha$, симметричных по нижним индексам, и антисимметричного тензора $F^{\sigma\mu}$.

Выражение $\nabla_\sigma F^{\sigma\alpha}$ является четырёхмерным вектором, поэтому его наблюдаемые х.и.-проекции имеют вид

$$T = b_\alpha \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha}, \quad B^i = h_\alpha^i \nabla_\sigma F^{\sigma\alpha} = \nabla_\sigma F^{\sigma i}. \quad (2.110)$$

Обозначим наблюдаемые х.и.-компоненты тензора $F^{\alpha\beta}$

$$E^i = \frac{F_{0\cdot}^i}{\sqrt{g_{00}}}, \quad H^{ik} = F^{ik}, \quad (2.111)$$

тогда его остальные, не равные нулю компоненты, выраженные через наблюдаемые компоненты (2.111), имеют вид

$$F_{0\cdot}^{\cdot 0} = \frac{1}{c} v_k E^k, \quad (2.112)$$

$$F_{k\cdot}^{\cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(E_k - \frac{1}{c} v_n H_k^n - \frac{1}{c^2} v_k v_n E^n \right), \quad (2.113)$$

$$F^{0i} = \frac{E^i - \frac{1}{c} v_k H^{ik}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad F_{0i} = -\sqrt{g_{00}} E_i, \quad (2.114)$$

$$F_{i\cdot}^{\cdot k} = -H_i^k - \frac{1}{c} v_i E^k, \quad F_{ik} = H_{ik} + \frac{1}{c} (v_i E_k - v_k E_i). \quad (2.115)$$

Подставляя эти компоненты при вычислении квадрата тензора $F^{\alpha\beta}$, мы получаем, что он равен

$$F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = H_{ik} H^{ik} - 2E_i E^i. \quad (2.116)$$

Подставляя значения этих компонент в (2.110) и заменяя обычные операторы дифференцирования на х.и.-операторы, после вычислений получаем

$$T = \frac{\nabla_\sigma F_{0\cdot}^{\cdot\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{* \partial E^i}{\partial x^i} + E^i \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik}, \quad (2.117)$$

$$B^i = \nabla_\sigma F^{\sigma i} = \frac{* \partial H^{ik}}{\partial x^k} + H^{ik} \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^k} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial E^i}{\partial t} + D E^i \right), \quad (2.118)$$

где A_{ik} есть антисимметричный х.и.-тензор неголономности пространства. Учитывая, что

$$\frac{* \partial E^i}{\partial x^i} + E^i \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} = * \nabla_i E^i \quad (2.119)$$

есть х.и.-дивергенция вектора E^i , и

$$* \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} = * \widetilde{\nabla}_k H^{ik} \quad (2.120)$$

есть физическая х.и.-дивергенция тензора H^{ik} , получаем окончательные выражения для физических наблюдаемых проекций дивергенции произвольного антисимметричного тензора $F^{\alpha\beta}$

$$T = {}^* \nabla_i E^i - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik}, \quad (2.121)$$

$$B^i = {}^* \widetilde{\nabla}_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E^i}{\partial t} + DE^i \right). \quad (2.122)$$

Теперь вычислим физически наблюдаемые компоненты дивергенции псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, дуального данному антисимметричному тензору $F^{\alpha\beta}$,

$$F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad F_{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (2.123)$$

Мы можем обозначить наблюдаемые компоненты псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$ следующим образом

$$H^{*i} = \frac{F_{0\cdot}^{*i}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad E^{*ik} = F^{*ik}, \quad (2.124)$$

так как между этими величинами и наблюдаемыми компонентами антисимметричного тензора $F^{\alpha\beta}$ (2.111) в силу дуальности данных тензоров $F^{\alpha\beta}$ и $F^{*\alpha\beta}$ существуют очевидные соответствия $H^{*i} \sim H^{ik}$ и $E^{*ik} \sim E^i$.

Соответственно, принимая во внимание, что

$$\frac{F_{0\cdot}^{*i}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ipq} H_{pq}, \quad F^{*ik} = -\varepsilon^{ikp} E_p, \quad (2.125)$$

мы получаем, что остальные компоненты псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, выраженные через наблюдаемые компоненты дуального ему тензора $F^{\alpha\beta}$ (2.111), имеют следующий вид

$$F_{0\cdot}^{*0} = \frac{1}{2c} v_k \varepsilon^{kpq} \left[H_{pq} + \frac{1}{c} (v_p E_q - v_q E_p) \right], \quad (2.126)$$

$$F_{i\cdot}^{*0} = \frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \left[\varepsilon_i{}^{pq} H_{pq} + \frac{1}{c} \varepsilon_i{}^{pq} (v_p E_q - v_q E_p) - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} \varepsilon^{kpq} v_i v_k H_{pq} - \frac{1}{c^3} \varepsilon^{kpq} v_i v_k (v_p E_q - v_q E_p) \right], \quad (2.127)$$

$$F^{*0i} = \frac{1}{2\sqrt{g_{00}}} \varepsilon^{ipq} \left[H_{pq} + \frac{1}{c} (v_p E_q - v_q E_p) \right], \quad (2.128)$$

$$F_{*0i} = \frac{1}{2} \sqrt{g_{00}} \varepsilon_{ipq} H^{pq}, \quad (2.129)$$

$$F_i^{*k} = \varepsilon_i^{kp} E_p - \frac{1}{2c} v_i \varepsilon^{kpq} H_{pq} - \frac{1}{c^2} v_i v_m \varepsilon^{mkp} E_p, \quad (2.130)$$

$$F_{*ik} = \varepsilon_{ikp} \left(E^p - \frac{1}{c} v_q H^{pq} \right), \quad (2.131)$$

и его квадрат равен

$$F_{*\alpha\beta} F^{*\alpha\beta} = \varepsilon^{ipq} (E_p H_{iq} - E_i H_{pq}), \quad (2.132)$$

где ε^{ipq} трёхмерный х.и.-дискриминантный тензор (2.73, 2.74). Тогда наблюдаемые компоненты дивергенции псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$ принимают вид

$$\frac{\nabla_\sigma F_{0\cdot}^{*\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{* \partial H^{*i}}{\partial x^i} + H^{*i} \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik}, \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma F^{*\sigma i} &= \frac{* \partial E^{*ik}}{\partial x^i} + E^{*ik} \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^k} - \\ &- \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i} \right), \end{aligned} \quad (2.134)$$

или, после выделения х.и.-дивергенции $* \nabla_i H^{*i}$ и х.и.-физической дивергенции $* \widetilde{\nabla}_k E^{*ik}$, аналогично (2.119, 2.120), получаем

$$\frac{\nabla_\sigma F_{0\cdot}^{*\sigma}}{\sqrt{g_{00}}} = * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik}, \quad (2.135)$$

$$\nabla_\sigma F^{*\sigma i} = * \widetilde{\nabla}_k E^{*ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{* \partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i} \right). \quad (2.136)$$

Помимо дивергенции вектора, антисимметричного тензора и псевдотензора 2-го ранга нам также необходимо знать наблюдаемые проекции дивергенции симметричного тензора 2-го ранга. В дальнейшем они понадобятся при выводе х.и.-законов сохранения. Так как эти выражения были ранее получены Зельмановым, то мы

просто приводим их по его публикациям. Обозначая наблюдаемые компоненты симметричного тензора $T^{\alpha\beta}$ как

$$\frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho, \quad \frac{T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = K^i, \quad T^{ik} = N^{ik}, \quad (2.137)$$

согласно Зельманову, имеем

$$\frac{\nabla_\sigma T_0^\sigma}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{*d\rho}{dt} + \rho D + D_{ik} N^{ik} + c * \nabla_i K^i - \frac{2}{c} F_i K^i, \quad (2.138)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\sigma i} = c \frac{*dK^i}{dt} + c DK^i + 2c (D_k^i + A_{k \cdot}^i) K^k + \\ + c^2 * \nabla_k N^{ik} - F_k N^{ik} - \rho F^i. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Наряду с внутренним (скалярным) произведением тензора поля с оператором абсолютного дифференцирования ∇ , являющимся дивергенцией данного тензорного поля, можно рассмотреть разность ковариантных производных тензорного поля. Эта величина называется *ротором* и геометрически представляет собой “вихрь” тензорного поля. *Абсолютным ротором* называют вихрь n -мерного тензорного поля в n -мерном пространстве.

Ротор четырёхмерного векторного поля A^α есть ковариантный антисимметричный тензор 2-го ранга, определяемый следующим образом*

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.140)$$

где $\nabla_\mu A_\nu$ абсолютная производная A_ν по координате x^μ

$$\nabla_\mu A_\nu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\sigma A_\sigma. \quad (2.141)$$

Ротор, свёрнутый с четырёхмерным совершенно антисимметричным дискриминантным тензором $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ (2.65), образует соответствующий псевдотензор

$$F^{*\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\mu\nu} (\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu) = E^{\alpha\beta\mu\nu} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right). \quad (2.142)$$

*Например §98 в книге П. К. Рашевского [18], хотя правильной называть истинным ротором (вихрем) поля не собственно антисимметричный тензор (2.140), а дуальный ему псевдотензор (2.142) как инвариант относительно отражения координатных осей.

В электродинамике $F_{\mu\nu}$ (2.140) представляет собой четырёхмерный (общековариантный) тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла) и является ротором четырёхмерного потенциала A^α электромагнитного поля. Поэтому нам потребуются выражения для наблюдаемых компонент четырёхмерного ротора $F_{\mu\nu}$ и дуального ему псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, записанные через наблюдаемые компоненты образующего их четырёхмерного вектора поля A^α (2.81).

Вычислим компоненты ротора $F_{\mu\nu}$. При этом мы учитываем, что $F_{00} = F^{00} = 0$, как и для любого антисимметричного тензора. В результате после вычислений мы получаем

$$F_{0i} = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left(\frac{\varphi}{c^2} F_i - \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{1}{c} \frac{* \partial q_i}{\partial t} \right), \quad (2.143)$$

$$F_{ik} = \frac{* \partial q_i}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^i} + \frac{\varphi}{c} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{c} \left(v_i \frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} - v_k \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{c^2} \left(v_i \frac{* \partial q_k}{\partial t} - v_k \frac{* \partial q_i}{\partial t} \right), \quad (2.144)$$

$$F_{0.}^{\cdot 0} = -\frac{\varphi}{c^3} v_k F^k + \frac{1}{c} v^k \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_k}{\partial t} \right), \quad (2.145)$$

$$F_{k.}^{\cdot 0} = -\frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left[\frac{\varphi}{c^2} F_k - \frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{1}{c} \frac{* \partial q_k}{\partial t} + \frac{2\varphi}{c^2} v^m A_{mk} + \frac{1}{c^2} v_k v^m \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_m}{\partial t} \right) - \frac{1}{c} v^m \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^m} \right) - \frac{\varphi}{c^4} v_k v_m F^m \right], \quad (2.146)$$

$$F_{k.}^{\cdot i} = h^{im} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^m} \right) - \frac{1}{c} h^{im} v_k \frac{* \partial \varphi}{\partial x^m} - \frac{1}{c^2} h^{im} v_k \frac{* \partial q_m}{\partial t} + \frac{\varphi}{c^3} v_k F^i + \frac{2\varphi}{c} A_{k.}^{\cdot i}, \quad (2.147)$$

$$F^{0k} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left[h^{km} \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_m}{\partial t} \right) - \frac{\varphi}{c^2} F^k + \frac{1}{c} v^n h^{nk} \left(\frac{* \partial q_n}{\partial x^m} - \frac{* \partial q_m}{\partial x^n} \right) - \frac{2\varphi}{c^2} v_m A^{mk} \right], \quad (2.148)$$

$$\frac{F_{0\cdot}^i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g^{i\alpha} F_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = h^{ik} \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_k}{\partial t} \right) - \frac{\varphi}{c^2} F^i, \quad (2.149)$$

$$F^{ik} = g^{i\alpha} g^{k\beta} F_{\alpha\beta} = h^{im} h^{kn} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} \right) - \frac{2\varphi}{c} A^{ik}, \quad (2.150)$$

причём величины (2.149, 2.150) представляют собой физически наблюдаемые проекции ротора $F_{\mu\nu}$. Соответственно, наблюдаемые проекции дуального ему псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$ имеют вид

$$\frac{F_{0\cdot}^{*i}}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g_{0\alpha} F^{*\alpha i}}{\sqrt{g_{00}}} = \varepsilon^{ikm} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{* \partial q_k}{\partial x^m} - \frac{* \partial q_m}{\partial x^k} \right) - \frac{\varphi}{c} A_{km} \right], \quad (2.151)$$

$$F^{*ik} = \varepsilon^{ikm} \left(\frac{\varphi}{c^2} F_m - \frac{* \partial \varphi}{\partial x^m} - \frac{1}{c} \frac{* \partial q_m}{\partial t} \right), \quad (2.152)$$

где $F_{0\cdot}^{*i} = g_{0\alpha} F^{*\alpha i} = g_{0\alpha} E^{\alpha i \mu \nu} F_{\mu\nu}$ вычисляется с помощью готовых компонент ротора $F_{\mu\nu}$ (2.143–2.148).

2.6 Операторы Лапласа и Даламбера

Оператором Лапласа называют трёхмерный оператор дифференцирования

$$\Delta = \nabla \nabla = \nabla^2 = -g^{ik} \nabla_i \nabla_k. \quad (2.153)$$

Его обобщением в четырёхмерном псевдоримановом пространстве является общековариантный оператор Даламбера

$$\square = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta. \quad (2.154)$$

В пространстве Минковского оператор Даламбера выглядит следующим образом

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3}, \quad (2.155)$$

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} - \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta, \quad (2.156)$$

где Δ оператор Лапласа (2.153) в пространстве Минковского.

Наша задача состоит в том, чтобы применить оператор Даламбера к скалярному и векторному полям в псевдоримановом пространстве и выразить результаты вычислений в х.и.-виде. Вначале

мы применим оператор Даламбера к четырёхмерному полю скаляра φ , так как в этом случае выкладки существенно проще (абсолютная производная скалярного поля $\nabla_\alpha \varphi$ не содержит символов Кристоффеля и сводится к обычной производной)

$$\square \varphi = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \varphi = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\beta} \right) = g^{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}. \quad (2.157)$$

Компоненты фундаментального метрического тензора выразим через х.и.-величины. Для компонент g^{ik} из (1.18) имеем $g^{ik} = -h^{ik}$. Величины g^{0i} получаются из выражения для вектора линейной скорости вращения пространства $v^i = -c g^{0i} \sqrt{g_{00}}$

$$g^{0i} = -\frac{1}{c \sqrt{g_{00}}} v^i. \quad (2.158)$$

Нулевую компоненту g^{00} можно найти из свойства фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\sigma} g^{\beta\sigma} = g_\alpha^\beta$. Расписывая это равенство покомпонентно для $\alpha = \beta = 0$,

$$g_{0\sigma} g^{0\sigma} = g_{00} g^{00} + g_{0i} g^{0i} = \delta_0^0 = 1, \quad (2.159)$$

и учитывая, что

$$g_{00} = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2, \quad g_{0i} = -\frac{1}{c} v_i \left(1 - \frac{w}{c^2}\right), \quad (2.160)$$

получаем

$$g^{00} = \frac{1}{\left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2} \left(1 - \frac{1}{c^2} v_i v^i\right). \quad (2.161)$$

Подставляя полученные компоненты фундаментального метрического тензора в $\square \varphi$ (2.157) и заменяя обычные операторы дифференцирования на х.и.-операторы дифференцирования, получаем уравнения Даламбера для скалярного поля в х.и.-виде

$$\square \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{* \partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{* \partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = * \square \varphi, \quad (2.162)$$

где $* \square$ четырёхмерный х.и.-оператор Даламбера и $* \Delta$ трёхмерный х.и.-оператор Лапласа

$$* \square = \frac{1}{c^2} \frac{* \partial^2}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{* \partial^2}{\partial x^i \partial x^k}, \quad (2.163)$$

$${}^* \Delta = -g^{ik} {}^* \nabla_i {}^* \nabla_k = h^{ik} \frac{{}^* \partial^2}{\partial x^i \partial x^k}. \quad (2.164)$$

Теперь применим оператор Лапласа к четырёхмерному векторному полю A^α в псевдоримановом пространстве

$$\square A^\alpha = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\alpha. \quad (2.165)$$

Так как величина $\square A^\alpha$ является четырёхмерным вектором, то её физически наблюдаемые х.и.-проекции на время и на пространство вычисляются по формулам

$$T = b_\sigma \square A^\sigma = b_\sigma g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\sigma, \quad (2.166)$$

$$B^i = h^i_\sigma \square A^\sigma = h^i_\sigma g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu A^\sigma. \quad (2.167)$$

Вообще вывод х.и.-уравнений Даламбера для векторного поля в псевдоримановом пространстве не является тривиальным, так как символы Кристоффеля не равны нулю и выкладки для проекций вторых производных занимают десятки страниц*. Это довольно трудоёмкое дело, требующее не одной недели аккуратных вычислений и проверок полученных результатов. Однако значение оператора Даламбера в теории движения частиц трудно недооценить, и достижение цели в данном случае оправдывает все приложенные усилия. Основным критерием правильности выкладок является правило хронометрической инвариантности, сформулированное Зельмановым: “при правильно сделанных выкладках все члены итоговых уравнений получатся хронометрически инвариантными, т.е. состоящими из х.и.-производных от наблюдаемых компонент векторного поля и х.и.-характеристик пространства отсчёта.”

После соответствующих вычислений мы получаем, что х.и.-проекции уравнений Даламбера для векторного поля в псевдори-

*Отчасти поэтому практические приложения теории электромагнитного поля и движущегося заряда в основном вычисляют в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского (пространства-времени специальной теории относительности), в которой символы Кристоффеля равны нулю. Впрочем, при общековариантной записи вообще трудно однозначно интерпретировать результаты вычислений, если они не выражены через физические наблюдаемые величины (хронометрические инварианты) или не приведены к какому-либо простому частному случаю, например в пространстве Минковского.

мановом пространстве (2.166, 2.167) имеют следующий вид

$$\begin{aligned}
 T = & {}^*\square\varphi - \frac{1}{c^3} \frac{{}^*\partial}{\partial t} (F_k q^k) - \frac{1}{c^3} F_i \frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \frac{1}{c^2} F^i \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^i} + \\
 & + h^{ik} \Delta_{ik}^m \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} - h^{ik} \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial}{\partial x^i} [(D_{kn} + A_{kn}) q^n] + \frac{D}{c^2} \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} - \\
 & - \frac{1}{c} D_m^k \frac{{}^*\partial q^m}{\partial x^k} + \frac{2}{c^3} A_{ik} F^i q^k + \frac{\varphi}{c^4} F_i F^i - \frac{\varphi}{c^2} D_{mk} D^{mk} - \\
 & - \frac{D}{c^3} F_m q^m - \frac{1}{c} \Delta_{kn}^m D_m^k q^n + \frac{1}{c} h^{ik} \Delta_{ik}^m (D_{mn} + A_{mn}) q^n,
 \end{aligned} \tag{2.168}$$

$$\begin{aligned}
 B^i = & {}^*\square A^i + \frac{1}{c^2} \frac{{}^*\partial}{\partial t} [(D_k^i + A_k^i) q^k] + \frac{D}{c^2} \frac{{}^*\partial q^i}{\partial t} + \\
 & + \frac{1}{c^2} (D_k^i + A_k^i) \frac{{}^*\partial q^k}{\partial t} - \frac{1}{c^3} \frac{{}^*\partial}{\partial t} (\varphi F^i) - \frac{1}{c^3} F^i \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial t} + \\
 & + \frac{1}{c^2} F^k \frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c} (D^{mi} + A^{mi}) \frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c^4} q^k F_k F^i + \\
 & + \frac{1}{c^2} \Delta_{km}^i q^m F^k - \frac{\varphi}{c^3} D F^i + \frac{D}{c^2} (D_n^i + A_n^i) q^n - \\
 & - h^{km} \left\{ \frac{{}^*\partial}{\partial x^k} (\Delta_{mn}^i q^n) + \frac{1}{c} \frac{{}^*\partial}{\partial x^k} [\varphi (D_m^i + A_m^i)] \right\} + \\
 & + (\Delta_{kn}^i \Delta_{mp}^n - \Delta_{km}^n \Delta_{np}^i) q^p + \frac{\varphi}{c} [\Delta_{kn}^i (D_m^n + A_m^n) - \\
 & - \Delta_{km}^n (D_n^i + A_n^i)] + \Delta_{kn}^i \frac{{}^*\partial q^n}{\partial x^m} - \Delta_{km}^n \frac{{}^*\partial q^i}{\partial x^n} \Big\},
 \end{aligned} \tag{2.169}$$

где ${}^*\square\varphi$ и ${}^*\square q^i$ результаты применения х.и.-оператора Даламбера (2.163) к $\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}$ и $q^i = A^i$ (наблюдаемым компонентам вектора A^α)

$${}^*\square\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^k}, \tag{2.170}$$

$${}^*\square q^i = \frac{1}{c^2} \frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial t^2} - h^{km} \frac{{}^*\partial^2 q^i}{\partial x^k \partial x^m}. \tag{2.171}$$

Результат применения оператора Даламбера к тензорному полю есть *уравнения Даламбера*. С физико-математической точки зре-

ния — это уравнения распространения волн этого поля. Если уравнения Даламбера не равны нулю, то это уравнения распространения волн поля, порождённых каким-то внесённым “источником” или их распределением в пространстве (уравнения Даламбера с “источником”). Например, для электромагнитного поля источниками служат электрические заряды и токи. Если же результат воздействия оператора Даламбера на поле равен нулю, то это будут уравнения распространения волн данного поля, существующего вне связи с каким-либо “источниками”, внесёнными в пространство. Таким образом, равенство нулю всех членов, не стоящих под знаком х.и.-оператора Даламбера \square , даёт физические условия распространения наблюдаемых волн исследуемого поля в четырёхмерном пространстве-времени, когда гравитационно-инерциальная сила F_i равна нулю, отсутствуют вращение A_{ik} и деформация D_{ik} самого пространства и нет какой-либо дополнительной среды. В этом случае наблюдаемые х.и.-уравнения распространения волн поля A^α получаются в результате приравнивания к нулю выражений (2.170, 2.171) и имеют довольно простой вид. Если гравитационный потенциал пространства отличен от нуля, а само пространство вращается и деформируется (достаточно проявления хотя бы одного из этих геометрических свойств пространства), то, как видно из формул (2.168, 2.169), уравнения распространения волн существенно усложняются из-за учёта воздействия каждого из этих геометрических факторов. Если же рассматриваемая область пространства-времени, помимо исследуемого тензорного поля, заполнена ещё какой-либо средой, то в уравнениях Даламбера появится дополнительный член в правой части, характеризующий эту среду и определяемый из описывающих её уравнений.

2.7 Заключение

Итак, подведём итоги этой главы. Помимо общих сведений о тензорах и тензорной алгебре мы сделали ряд удобных заготовок, которые существенно облегчат наши расчёты в следующих главах. Например, встретившись по ходу исследований с каким-либо антисимметричным тензором, теперь не нужно специально вычислять его физически наблюдаемые компоненты, достаточно лишь воспользоваться полученными здесь общими формулами. То же самое

и для дифференциальных операторов. Равенство нулю абсолютной производной динамического вектора частицы по направлению даёт динамические уравнения движения этой частицы. Равенство нулю дивергенции векторного поля даёт условие Лоренца и уравнение неразрывности. Равенство нулю дивергенции симметричного тензора 2-го ранга даёт законы сохранения, а равенство нулю дивергенции антисимметричного тензора (и псевдотензора) 2-го ранга — уравнения Максвелла. Ротор векторного поля — это тензор электромагнитного поля (тензор Максвелла). Уравнения Даламбера суть уравнения распространения волн в обобщённом виде, т.е. не только в приближении геометрической оптики. И это далеко не полный список приложений наших математических заготовок. Вычисление их физических наблюдаемых проекций — порой довольно сложное дело, совершенно незачем несколько раз повторять эти выкладки в книге для каждого конкретного случая. Гораздо удобнее взять уже готовые выражения из этой главы и просто подставить в них необходимые компоненты дифференцируемой величины.

3.1 Постановка задачи

В этой главе нам предстоит решить две задачи. Во-первых, необходимо построить теорию электромагнитного поля в четырёхмерном псевдоримановом пространстве, в которой все характеристики поля будут выражены в х.и.-виде (т.е. через физически наблюдаемые величины). И, во-вторых, нам необходимо вывести х.и.-динамические уравнения движения для частицы с электрическим зарядом.

Электромагнитное поле обычно рассматривается как векторное поле четырёхмерного потенциала A^α в четырёхмерном пространстве — времени (псевдоримановом пространстве). Его временной компонентой является *скалярный потенциал* электромагнитного поля φ , а трёхмерные компоненты образуют так называемый *вектор-потенциал* A^i . Собственно, четырёхмерный потенциал электромагнитного поля A^α в системе единиц СГСЭ и гауссовой имеет размерность

$$A^\alpha \text{ [грамм}^{1/2} \text{ см}^{1/2} \text{ сек}^{-1}\text{]}, \quad (3.1)$$

такой же размерностью обладают и его компоненты φ и A^i .

Таким образом, исследование электромагнитного поля существенно отличается от исследования поля гравитации: в рамках теории хронометрических инвариантов было получено, что гравитационно-инерциальная сила F^i и гравитационный потенциал w (1.38) являются функциями только геометрических характеристик пространства, тогда как электромагнитное поле (т.е. поле потенциала A^α) на сегодняшний день не “геометризовано”, и мы вынуждены

рассматривать его просто как внешнее векторное поле, внесённое в пространство-время.

Уравнения классической электродинамики — уравнения Максвелла, устанавливающие соотношения между напряжённостями электрического и магнитного полей, — были выведены ещё в то время, когда в методах теоретической физики не использовалось не только искривлённое псевдориманово пространство, но и плоское пространство Минковского. Затем, с появлением теории относительности, была создана релятивистская электродинамика, в рамках которой уравнения Максвелла были получены в четырёхмерной общековариантной формулировке в псевдоримановом пространстве. Однако, приобретя общековариантный вид, они потеряли ту наглядность, которая была преимуществом классической электродинамики. Правда, четырёхмерные уравнения в пространстве Минковского можно просто представить в виде скалярной (временной) и векторных (пространственных) компонент, так как в галилеевой системе отсчёта они по определению являются наблюдаемыми величинами. Но когда мы переходим к искривлённому, неоднородному и анизотропному псевдоримановому пространству, задача сопоставления скалярной и векторных компонент общековариантных уравнений с уравнениями классической и релятивистской электродинамики становится нетривиальной, так как возникает проблема, какие величины считать физически наблюдаемыми.

Вообще говоря, очевидно, что уравнения релятивистской электродинамики в псевдоримановом пространстве в итоге должны быть записаны относительно физических наблюдаемых компонент электромагнитного поля и физических наблюдаемых (эталонных) характеристик пространства отсчёта наблюдателя. Эту задачу мы будем решать с помощью математического аппарата хронометрических инвариантов, т.е. посредством проецирования общековариантных величин на время и на пространство реального тела отсчёта, физические и геометрические характеристики которого являются эталонами для измерений. Полученные таким путём результаты позволят нам вывести *наблюдаемое обобщение* основных величин и законов классической и релятивистской электродинамики в такой форме, которая учитывает влияние физических и геометрических характеристик пространства отсчёта (тела отсчёта) на результаты наблюдений.

3.2 Наблюдаемые компоненты тензора электромагнитного поля. Инварианты поля

Тензор электромагнитного поля (по определению) представляет собой ротор четырёхмерного электромагнитного поля A^α и иначе называется *тензором Максвелла*

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (3.2)$$

Как нетрудно видеть, это выражение представляет собой общековариантное (четырёхмерное) обобщение трёхмерных величин классической электродинамики

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{H} = \text{rot}\vec{A}, \quad (3.3)$$

которыми являются электрическая напряжённость \vec{E} и магнитная напряжённость \vec{H} электромагнитного поля, а также скалярный потенциал φ и трёхмерный векторный потенциал \vec{A} электромагнитного поля, где

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad (3.4)$$

оператор градиента скалярной функции в трёхмерном евклидовом пространстве.

В этом параграфе мы выясним, какие компоненты общековариантного тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ являются физически наблюдаемыми величинами, и установим связь этих величин с трёхмерными векторами напряжённости электрического поля \vec{E} и магнитного поля \vec{H} классической электродинамики, которые мы также вычислим в псевдоримановом пространстве (оно, вообще говоря, является искривлённым, неоднородным и анизотропным).

Здесь очень важно отметить следующее. Так как плоском пространстве-времени (пространстве Минковского) в инерциальной системе отсчёта метрика имеет вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (3.5)$$

и, соответственно этой метрике, компоненты фундаментального метрического тензора принимают значения

$$g_{00} = 1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad (3.6)$$

то нет различия между значениями ковариантных и контравариантных компонент вектора A^α (в частности поэтому все вычисления в пространстве Минковского существенно упрощаются)

$$\varphi = A_0 = A^0, \quad A_i = -A^i. \quad (3.7)$$

В псевдоримановом пространстве (и в римановом пространстве вообще) это не всё равно, так как метрика имеет общий вид, поэтому скалярный потенциал и вектор-потенциал электромагнитного поля следует определять как физически наблюдаемые х.и.-компоненты четырёхмерного потенциала A^α

$$\varphi = b^\alpha A_\alpha = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad q^i = h^\alpha_i A^\alpha = A^i. \quad (3.8)$$

Остальные, не являющиеся хронометрически инвариантными, компоненты A^α выражаются через φ и q^i в виде

$$A^0 = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left(\varphi + \frac{1}{c} v_i q^i \right), \quad A_i = -q_i - \frac{\varphi}{c} v_i. \quad (3.9)$$

Причём, согласно теории хронометрических инвариантов, ковариантный х.и.-вектор q_i получается из контравариантного q^i в результате опускания индекса с помощью наблюдаемого трёхмерного х.и.-тензора h_{ik} , т.е. $q_i = h_{ik} q^k$, тогда как обычный ковариантный вектор A_i , не являющийся хронометрическим инвариантом, получается путём опускания индекса с помощью четырёхмерного фундаментального метрического тензора $A_i = g_{i\alpha} A^\alpha$.

Квадрат длины вектора четырёхмерного электромагнитного потенциала A^α в сопутствующей системе отсчёта, вычисляемый по формуле (2.39), имеет вид

$$A_\alpha A^\alpha = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = \varphi^2 - h_{ik} q^i q^k = \varphi^2 - q^2, \quad (3.10)$$

и является: вещественным, если $\varphi^2 > q^2$; мнимым, если $\varphi^2 < q^2$; нулевым (изотропным), если $\varphi^2 = q^2$.

Теперь, используя в определении тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ (3.2) компоненты четырёхмерного потенциала A^α (3.8, 3.9), выражая обычные производные через х.и.-производные (1.33), по формулам для компонент ротора произвольного векторного поля (2.143–2.150) получаем физически наблюдаемые х.и.-компоненты

данного тензора $F_{\alpha\beta}$

$$\frac{F_{0\cdot}^i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{g^{i\alpha} F_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} = h^{ik} \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_k}{\partial t} \right) - \frac{\varphi}{c^2} F^i, \quad (3.11)$$

$$F^{ik} = g^{i\alpha} g^{k\beta} F_{\alpha\beta} = h^{im} h^{kn} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} \right) - \frac{2\varphi}{c} A^{ik}. \quad (3.12)$$

Обозначим наблюдаемые х.и.-компоненты тензора электромагнитного поля

$$E^i = \frac{F_{0\cdot}^i}{\sqrt{g_{00}}}, \quad H^{ik} = F^{ik}, \quad (3.13)$$

тогда как их ковариантные х.и.-величины равны

$$E_i = h_{ik} E^k = \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_i, \quad (3.14)$$

$$H_{ik} = h_{im} h_{kn} H^{mn} = \frac{* \partial q_i}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^i} - \frac{2\varphi}{c} A_{ik}, \quad (3.15)$$

а смешанные компоненты $H_{k\cdot}^m = -H_{\cdot k}^m$ получаются из H^{ik} с помощью трёхмерного х.и.-метрического тензора $H_{k\cdot}^m = h_{ki} H^{im}$. При этом деформация пространства отсчёта $D_{ik} = \frac{1}{2} \frac{* \partial h_{ik}}{\partial t}$ (1.40) содержится в этих выражениях в неявном виде и проявляется при подстановке $q_k = h_{km} q^m$ в производные по времени. Мы можем выразить и остальные компоненты тензора электромагнитного поля $F_{\alpha\beta}$ через его наблюдаемые компоненты E^i и H^{ik} (3.11), используя формулы для компонент произвольного антисимметричного тензора (2.112–2.115), так как в них входят величины E^i и H^{ik} в “неявном” виде, независимо от того, будь это компоненты ротора или антисимметричного тензора какого-то другого вида.

В пространстве Минковского, где ускорение F^i , вращение A_{ik} и деформация D_{ik} пространства отсчёта равны нулю, выражение для компоненты E_i (3.14) принимает вид

$$E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t}, \quad (3.16)$$

или в трёхмерной векторной форме,

$$\vec{E} = \vec{\nabla} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.17)$$

что с точностью до знака совпадает с выражением для \vec{E} (3.3) из классической электродинамики.

Теперь для того, чтобы выразить напряжённость магнитного поля в трёхмерном векторном виде, используем компоненты псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, который в псевдоримановом пространстве является дуальным тензору электромагнитного поля $F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$ (2.123). Физически наблюдаемыми компонентами этого псевдотензора, согласно формуле (2.124), являются следующие величины

$$H^{*i} = \frac{F_{0\cdot}^{*i}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad E^{*ik} = F^{*ik}. \quad (3.18)$$

Используя выражения для компонент псевдотензора $F^{*\alpha\beta}$, полученные во 2-й главе (2.125–2.131), и формулы для E_i и H_{ik} (3.14, 3.15), получаем развёрнутые выражения для H^{*i} и E^{*ik} , а именно

$$H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}, \quad (3.19)$$

$$E^{*ik} = \varepsilon^{ikn} \left(\frac{\varphi}{c^2} F_n - \frac{* \partial \varphi}{\partial x^n} - \frac{1}{c} \frac{* \partial q_n}{\partial t} \right) = -\varepsilon^{ikn} E_n. \quad (3.20)$$

Отсюда видно, что дуально сопряжёнными являются пары тензоров: H^{*i} и H_{mn} , E^{*ik} и E_m . Хронометрически инвариантная величина H^{*i} (3.19) состоит из члена

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} \right) = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} (* \nabla_n q_m - * \nabla_m q_n), \quad (3.21)$$

представляющего собой х.и.-ротор трёхмерного векторного поля q_m и члена

$$\frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \frac{2\varphi}{c} A_{mn} = \frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}, \quad (3.22)$$

где $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}$ х.и.-псевдовектор угловой скорости вращения пространства отсчёта. В галилеевой системе отсчёта пространства Минковского, т.е. при отсутствии ускорения, вращения и деформации, полученное нами выражение для х.и.-псевдовектора напряжённости магнитного поля H^{*i} (3.19) принимает вид

$$H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m} \right), \quad (3.23)$$

или в трёхмерной векторной форме

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}. \quad (3.24)$$

Таким образом, структура псевдориманова пространства оказывает воздействие на электромагнитное поле тем, что наблюдаемые х.и.-векторы электрической E_i (3.14) и магнитной H^{*i} (3.19) напряжённостей зависят от гравитационного потенциала и вращения самого пространства отсчёта.

Такая же ситуация будет иметь место и в плоском пространстве Минковского, если избрать в качестве системы отсчёта наблюдателя неинерциальную систему отсчёта, которая движется ускоренно и вращается. Однако в пространстве Минковского всегда можно избрать галилееву систему отсчёта (что невозможно в псевдоримановом пространстве), так как само пространство Минковского никак не ускоряет, не вращает и не деформирует систему отсчёта. Поэтому такие эффекты в пространстве Минковского являются чисто относительными (координатными).

В релятивистской электродинамике вводятся *инварианты электромагнитного поля* (или просто — *инварианты поля*)

$$J_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2 F_{0i} F^{0i} + F_{ik} F^{ik}, \quad (3.25)$$

$$J_2 = F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = 2 F_{0i} F^{*0i} + F_{ik} F^{*ik}. \quad (3.26)$$

Первый из них является скаляром, второй — псевдоскаляром. Выражая их через компоненты тензора Максвелла

$$J_1 = H_{ik} H^{ik} - 2 E_i E^i, \quad J_2 = \varepsilon^{imn} (E_m H_{in} - E_i H_{nm}), \quad (3.27)$$

и используя выражения для компонент дуального псевдотензора $F^{*\mu\nu}$, которые мы получили во 2-й главе, можно записать инварианты поля в виде

$$J_1 = -2 (E_i E^i - H_{*i} H^{*i}), \quad J_2 = -4 E_i H^{*i}. \quad (3.28)$$

В силу того, что J_1 и J_2 являются инвариантами, можно утверждать следующее. Напряжённости электрического и магнитного полей равны в случаях:

- 1) если $E^2 = H^{*2}$ в какой-либо системе отсчёта, то это равенство будет сохраняться и в любой другой системе отсчёта;

- 2) если в какой-либо системе отсчёта векторы напряжённостей электрического и магнитного полей ортогональны $E_i H^{*i} = 0$, то эта ортогональность также сохраняется в любой другой системе отсчёта.

Электромагнитное поле, удовлетворяющее условиям $E^2 = H^{*2}$ и $E_i H^{*i} = 0$, т.е. когда оба инварианта поля (3.28) равны нулю, в электродинамике называют *изотропным*. Причём здесь под изотропностью подразумевается не местоположение поля в светоподобной области пространства-времени (как принято обозначать в теории пространства-времени), а свойство поля излучаться одинаково во всех направлениях трёхмерного пространства.

Инварианты электромагнитного поля можно также выразить через х.и.-производные от наблюдаемых скалярного потенциала φ и вектор-потенциала q^i (3.8), а также через х.и.-характеристики пространства отсчёта

$$\begin{aligned}
 J_1 = 2 \left[h^{im} h^{kn} \left(\frac{* \partial q_i}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^i} \right) \frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - h^{ik} \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} \frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} - \right. \\
 \left. - \frac{2}{c} h^{ik} \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} \frac{* \partial q_k}{\partial t} - \frac{1}{c^2} h^{ik} \frac{* \partial q_i}{\partial t} \frac{* \partial q_k}{\partial t} + \frac{8\varphi}{c^2} \Omega_{*i} \Omega^{*i} - \right. \\
 \left. - \frac{2\varphi}{c} \varepsilon^{imn} \Omega_{*m} \frac{* \partial q_i}{\partial x^n} + \frac{2\varphi}{c^2} \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} F^i + \frac{2\varphi}{c^3} \frac{* \partial q_i}{\partial t} F^i - \frac{\varphi}{c^4} F_i F^i \right], \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 = \frac{1}{2} \left[\varepsilon^{imn} \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} \right) - \frac{4\varphi}{c} \Omega^{*i} \right] \times \\
 \times \left(\frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_i \right). \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Физические условия для изотропного электромагнитного поля получаются путём приравнивания предыдущих выражений (3.29, 3.30) к нулю. В этом случае мы видим, что совместное выполнение условия равенства трёхмерных длин векторов напряжённостей электрического и магнитного полей $E^2 = H^{*2}$ и условие их взаимной ортогональности $E_i H^{*i} = 0$ в псевдоримановом пространстве определяются не только свойствами самого поля (скалярным потенциалом φ и вектором-потенциалом q^i), но также и ускорением F^i , вращением A_{ik} и деформациями D_{ik} самого пространства тела отсчёта. В частности, векторы E_i и H^{*i} взаимно ортогональны, когда про-

пространство голономно $\Omega^{*i} = 0$, а трёхмерное поле вектор-потенциала q^i является безвихревым $\varepsilon^{imn} \left(\frac{*dq_m}{\partial x^n} - \frac{*dq_n}{\partial x^m} \right) = 0$.

3.3 Хронометрически инвариантные уравнения Максвелла. Закон сохранения электрического заряда. Условие Лоренца

В классической электродинамике зависимости между напряжённостями электрического поля \vec{E} [грамм^{1/2} см^{-1/2} сек⁻¹] и магнитного поля \vec{H} [грамм^{1/2} см^{-1/2} сек⁻¹] устанавливаются *уравнениями Максвелла*, которые представляют собой результат обобщения опытных фактов. В середине XIX-го века Дж. К. Максвелл показал: когда электромагнитное поле возбуждается в вакууме заданными зарядами и токами, собственно поле определяется системой из двух групп уравнений [20]

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi \rho \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (3.31a)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II,} \quad (3.31b)$$

где ρ [грамм^{1/2} см^{-3/2} сек⁻¹] плотность распределения электрического заряда (количество заряда e [грамм^{1/2} см^{3/2} сек⁻¹], содержащегося в 1 см³) и \vec{j} [грамм^{1/2} см^{-1/2} сек⁻²] вектор плотности тока. Уравнения, содержащие источники ρ и \vec{j} , порождающие электромагнитное поле, называют *первой группой* уравнений Максвелла, а уравнения, не содержащие источников тока поля — *второй группой* уравнений Максвелла.

Первое уравнение 1-й группы представляет собой закон Био-Савара, второе — теорему Гаусса, записанные в дифференциальной форме. Первое и второе уравнения 2-й группы, соответственно, являются дифференциальной формой закона электромагнитной индукции Фарадея и условием отсутствия магнитных зарядов. Всего получается 8 уравнений (2 векторных и 2 скалярных), тогда как неизвестных 10: 3 компоненты \vec{E} , 3 компоненты \vec{H} , 3 компоненты \vec{j} и одна компонента ρ .

Связь источников поля ρ и \vec{j} устанавливается уравнением закона сохранения электрического заряда, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (3.32)$$

и является математическим выражением экспериментального факта, что электрический заряд не может быть уничтожен, а при контакте заряженных тел лишь перераспределяется между ними.

Теперь у нас есть система из 9 уравнений относительно 10 неизвестных, т.е. пока система уравнений, определяющих поле и его источники, остаётся не полностью определённой. Десятым уравнением, благодаря которому система уравнений поля и его источников становится определённой (число уравнений равно числу неизвестных), является условие Лоренца, накладываемое на потенциалы электромагнитного поля и имеющее вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0. \quad (3.33)$$

Условие Лоренца следует из того, что скалярный потенциал φ и вектор-потенциал \vec{A} электромагнитного поля, связанные с напряжённостями \vec{E} и \vec{H} соотношениями (3.3), определяются из них неоднозначно: \vec{E} и \vec{H} в (3.3) не изменяются при замене

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} \Psi, \quad \varphi = \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad (3.34)$$

где Ψ произвольный скаляр. Очевидно, что неоднозначность определения φ и \vec{A} допускает, помимо условия Лоренца, и другие соотношения этих величин. Тем не менее, именно условие Лоренца позволяет преобразовать уравнения Максвелла в волновые уравнения. Получается это следующим образом. Уравнение $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ (3.31) выполняется полностью, если положить $\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$. При этом первое уравнение 2-й группы принимает вид

$$\operatorname{rot} \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0, \quad (3.35)$$

решением которого является

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (3.36)$$

Подставляя величины $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$ и \vec{E} (3.36) в 1-ю группу уравнений Максвелла, получаем

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.37)$$

$$\Delta \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\text{div} \vec{A}) = -4\pi \rho, \quad (3.38)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ обычный оператор Лапласа.

Накладывая на потенциалы φ и \vec{A} условие Лоренца (3.33), приводим уравнения 1-й группы к виду

$$\square \varphi = -4\pi \rho, \quad (3.39)$$

$$\square \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}, \quad (3.40)$$

где $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ обычный оператор Даламбера.

Результат воздействия оператора Даламбера на поле представляет собой уравнения распространения волн этого поля (см. §2.6). Поэтому полученный результат означает, что при выполнении условия Лоренца группа уравнений Максвелла (3.31) представляет собой систему уравнений распространения волн скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля с источниками (зарядами и токами). Эти уравнения в псевдоримановом пространстве мы выведем в следующем параграфе, а пока рассмотрим общековариантные уравнения Максвелла в псевдоримановом пространстве и выведем их в х.и.-виде, т.е. выраженными через физически наблюдаемые величины.

В псевдоримановом пространстве условие Лоренца имеет следующий общековариантный вид

$$\nabla_{\sigma} A^{\sigma} = \frac{\partial A^{\sigma}}{\partial x^{\sigma}} + \Gamma_{\sigma\mu}^{\sigma} A^{\mu} = 0, \quad (3.41)$$

т.е. представляет собой условие сохранения четырёхмерного потенциала поля. Аналогичный вид имеет и закон сохранения электрического заряда (*уравнение неразрывности*)

$$\nabla_{\sigma} j^{\sigma} = 0, \quad (3.42)$$

где j^α четырёхмерный *вектор тока* (иначе — *ток смещения*), наблюдаемыми компонентами которого являются плотность электрического заряда

$$\rho = \frac{1}{c} \frac{j_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (3.43)$$

и трёхмерный вектор плотности тока j^i . Используя выражение для дивергенции произвольного векторного поля в х.и.-виде, выведенное нами во 2-й главе (2.107), мы сразу получаем условие Лоренца (3.41), записанное в х.и.-виде

$$\frac{1}{c} \frac{* \partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{c} D + * \nabla_i q^i - \frac{1}{c^2} F_i q^i = 0, \quad (3.44)$$

и уравнение неразрывности (3.42) в х.и.-виде

$$\frac{* \partial \rho}{\partial t} + \rho D + * \nabla_i j^i - \frac{1}{c^2} F_i j^i = 0. \quad (3.45)$$

Здесь величина $D = h^{ik} D_{ik} = D_n^n = \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial t}$ обозначает след тензора скоростей деформации (1.40), т.е. скорость относительного расширения элемента объёма пространства, а $* \nabla_i$ обозначает символ х.и.-производной (2.105).

Так как F_i (1.38) содержит производную от гравитационного потенциала $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$, то член $\frac{1}{c^2} F_i q^i$ в полученных выражениях (3.44, 3.45) учитывает различие скорости хода времени на противоположных стенках элементарного объёма. В выражение для гравитационно-инерциальной силы F_i (1.38) входит также нестационарность скорости вращения пространства. Кроме того, гравитационный потенциал и скорость вращения пространства входят и в х.и.-операторы дифференцирования (1.33)

$$\frac{* \partial}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{* \partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} v_i \frac{* \partial}{\partial t}. \quad (3.46)$$

Таким образом, условия сохранения потоков векторных полей A^α , (3.44, 3.45), непосредственно зависят от величины гравитационного потенциала и от скорости вращения пространства. Хронометрически инвариантные величины $\frac{* \partial \varphi}{\partial t}$ и $\frac{* \partial \rho}{\partial t}$ представляют собой наблюдаемые измерения во времени физических наблюдаемых величин φ и ρ . Хронометрически инвариантные величины φD и ρD

являются наблюдаемыми изменениями во времени трёхмерных объёмов, заполненных потенциалом φ и зарядами ρ .

При отсутствии гравитационно-инерциальной силы, вращения и деформации пространства, полученные х.и.-выражения для условия Лоренца (3.44) и закона сохранения электрического заряда (3.45) принимают следующий вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial q^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} q^i = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} - \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} j^i = 0. \quad (3.48)$$

В галилеевой системе отсчёта пространства Минковского наши уравнения принимают совсем простой вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial q^i}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0, \quad (3.49)$$

или в обычной векторной записи

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0, \quad (3.50)$$

что полностью совпадает с условием Лоренца (3.33) и законом сохранения заряда (3.32) классической электродинамики.

Рассмотрим уравнения Максвелла. В псевдоримановом пространстве каждая их пара объединяется в одно уравнение, т.е.

$$\nabla_{\sigma} F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^{\mu}, \quad \nabla_{\sigma} F^{*\mu\sigma} = 0, \quad (3.51)$$

где $F^{\mu\sigma}$ контравариантная форма тензора электромагнитного поля (тензора Максвелла) $F^{*\mu\sigma}$ и дуальный ему псевдотензор Максвелла. Используя х.и.-выражения для дивергенции антисимметричного тензора 2-го ранга (2.121, 2.122) и для дуального ему псевдотензора (2.135, 2.136), полученные нами во 2-й главе, запишем уравнения Максвелла в х.и.-виде

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i E^i - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi \rho \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial E^i}{\partial t} + D E^i \right) &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (3.52)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ {}^* \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} - \frac{1}{c} \left(\frac{{}^* \partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II.} \quad (3.53)$$

Эти х.и.-уравнения Максвелла были получены независимо друг от друга Х. дель Прадо и Н. В. Павловым [25] (Зельманов дал задание этим двум студентам и объяснил, как его решить).

Теперь преобразуем х.и.-уравнения Максвелла таким образом, чтобы в них в качестве неизвестных входили лишь величины E^i и H^{*i} . Выразив эти величины из определений (2.111, 2.124)

$$H_{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} H^{mn}, \quad (3.54)$$

$$E^{*ik} = \varepsilon^{ikm} \left(\frac{\varphi}{c^2} F_m - \frac{{}^* \partial \varphi}{\partial x^m} - \frac{1}{c} \frac{{}^* \partial q_m}{\partial t} \right) = -\varepsilon^{ikm} E_m, \quad (3.55)$$

и умножив первое равенство на ε^{ipq} , получаем

$$\varepsilon^{ipq} H_{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ipq} \varepsilon_{imn} H^{mn} = \frac{1}{2} (\delta_m^p \delta_n^q - \delta_m^q \delta_n^p) H^{mn} = H^{pq}. \quad (3.56)$$

Подставляя этот результат в виде $H^{ik} = \varepsilon^{mik} H_{*m}$ в первое уравнение 1-й группы (3.52), преобразуем его к виду

$${}^* \nabla_i E^i - \frac{2}{c} \Omega_{*m} H^{*m} = 4\pi\rho, \quad (3.57)$$

где $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}$ х.и.-псевдовектор угловой скорости вращения пространства отсчёта.

Подставляя второе выражение $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikm} E_m$ (3.55) в первое уравнение 2-й группы (3.53), получаем

$${}^* \nabla_i H^{*i} + \frac{2}{c} \Omega_{*m} E^m = 0. \quad (3.58)$$

Далее, после подстановки $H^{ik} = \varepsilon^{mik} H_{*m}$ во второе уравнение 1-й группы (3.52), находим

$$\begin{aligned} {}^* \nabla_k \left(\varepsilon^{mik} H_{*m} \right) - \frac{1}{c^2} F_k \varepsilon^{mik} H_{*m} - \\ - \frac{1}{c} \left(\frac{{}^* \partial E^i}{\partial t} + \frac{{}^* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial t} E^i \right) = \frac{4\pi}{c} J^i. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Умножив обе его части на \sqrt{h} и учитывая, что ${}^* \nabla_k \varepsilon^{mik} = 0$, мы преобразуем это выражение (3.59) к виду

$$\varepsilon^{ikm} {}^* \nabla_k (H_{*m} \sqrt{h}) - \frac{1}{c^2} \varepsilon^{ikm} F_k H_{*m} \sqrt{h} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (E^i \sqrt{h}) = \frac{4\pi}{c} j^i \sqrt{h} \quad (3.60)$$

или иначе

$$\varepsilon^{ikm} {}^* \widetilde{\nabla}_k (H_{*m} \sqrt{h}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (E^i \sqrt{h}) = \frac{4\pi}{c} j^i \sqrt{h}, \quad (3.61)$$

где ${}^* \widetilde{\nabla}_k = {}^* \nabla_k - \frac{1}{c^2} F_k$ х.и.-физическая дивергенция (2.106), учитывающая различие темпа течения времени на противоположных стенках элементарного объема, а $j^i \sqrt{h}$ объемная плотность тока. Полученное уравнение (3.60) представляет собой х.и.-закон Био-Савара в псевдоримановом пространстве. Подставляя во второе уравнение 2-й группы (3.53) величину $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikm} E_m$ (3.55) и проведя аналогичные преобразования, получаем его в виде

$$\varepsilon^{ikm} {}^* \widetilde{\nabla}_k (E_m \sqrt{h}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H^{*i} \sqrt{h}) = 0, \quad (3.62)$$

представляющим собой х.и.-запись закона электромагнитной индукции Фарадея в псевдоримановом пространстве. Итого, система из 10 х.и.-уравнений относительно 10 неизвестных, определяющих электромагнитное поле и его источники в псевдоримановом пространстве, принимает вид

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_i E^i - \frac{2}{c} \Omega_{*m} H^{*m} &= 4\pi \rho \\ \varepsilon^{ikm} {}^* \widetilde{\nabla}_k (H_{*m} \sqrt{h}) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (E^i \sqrt{h}) &= \frac{4\pi}{c} j^i \sqrt{h} \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (3.63)$$

$$\left. \begin{aligned} {}^* \nabla_i H^{*i} + \frac{2}{c} \Omega_{*m} E^m &= 0 \\ \varepsilon^{ikm} {}^* \widetilde{\nabla}_k (E_m \sqrt{h}) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (H^{*i} \sqrt{h}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II}, \quad (3.64)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{c} D + {}^* \widetilde{\nabla}_i q^i = 0 \quad \text{условие Лоренца}, \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho D + {}^* \widetilde{\nabla}_i j^i = 0 \quad \text{уравнение непрерывности}. \quad (3.66)$$

В пространстве Минковского, в галилеевой системе отсчёта, мы имеем $\sqrt{h} = 1$, пространство не деформируется $D_{ik} = 0$, не вращается $\Omega_{*m} = 0$, и там нет гравитационного поля $F_i = 0$. В этом случае из х.и.-уравнений Максвелла в псевдоримановом пространстве (3.63, 3.64) мы получаем уравнения Максвелла классической электродинамики в тензорном виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= 4\pi\rho \\ e^{ikm} \left(\frac{\partial H_{*m}}{\partial x^k} - \frac{\partial H_{*k}}{\partial x^m} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial E^i}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (3.67)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i} &= 0 \\ e^{ikm} \left(\frac{\partial E_m}{\partial x^k} - \frac{\partial E_k}{\partial x^m} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial H^{*i}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II}. \quad (3.68)$$

Причём, если записать эти уравнения в векторном виде, они станут аналогичными классическим уравнениям Максвелла в трёхмерном евклидовом пространстве (3.31).

Кроме того, из полученных х.и.-уравнений Максвелла в псевдоримановом пространстве (3.64) видно, что при отсутствии вращения пространства х.и.-математическая дивергенция магнитного поля равна нулю ${}^* \nabla_i H^{*i} = 0$. Иначе говоря, магнитное поле в голономном пространстве сохраняется. Однако дивергенция электрического поля в этом случае не равна нулю ${}^* \nabla_i E^i = 4\pi\rho$ (3.63), т.е. электрическое поле неразрывно связано с плотностью электрических зарядов ρ . Отсюда можно сделать вывод, что “магнитный заряд”, если он действительно существует, непосредственно связан с полем вращения самого пространства.

3.4 Четырёхмерные уравнения Даламбера для электромагнитного потенциала и их наблюдаемые компоненты

Как мы упоминали, оператор Даламбера, применённый к полю, даёт уравнения распространения волн этого поля. Таким образом, уравнения Даламбера для скалярного электромагнитного потенциала φ суть уравнения распространения волн скалярного поля φ , а для трёхмерного вектор-потенциала \vec{A} это уравнения распространения волн трёхмерного векторного поля \vec{A} .

Вывод общековариантной формы этих уравнений для четырёхмерного потенциала электромагнитного поля приведён в книге К. П. Станюковича [26]. Используя 1-ю группу общековариантных уравнений Максвелла $\nabla_\sigma F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^\mu$ (3.51) и условие Лоренца $\nabla_\sigma A^\sigma = 0$ (3.41), он получил общековариантное уравнение относительно четырёхмерного электромагнитного потенциала A^α

$$\square A^\alpha - R^\alpha_\beta A^\beta = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha, \quad (3.69)$$

где $R^\alpha_\beta = g^{\alpha\mu} R^\sigma_{\mu\beta\sigma}$ тензор Риччи и $R^\alpha_{\mu\beta\sigma}$ четырёхмерный тензор кривизны Римана-Кристоффеля.

Член $R^\alpha_\beta A^\beta$ в левой части отсутствует, если тензор Риччи равен нулю, т.е. метрика пространства удовлетворяет уравнениям Эйнштейна вне масс (в вакууме). Этим членом можно также пренебречь в том случае, когда кривизна пространства очень мала. Однако, даже в плоском пространстве Минковского эту задачу можно рассмотреть при наличии ускорения и вращения. Даже такое приближение может проявить, например, влияние ускорения и вращения тела отсчёта на наблюдаемую скорость распространения электромагнитных волн.

Все эти соображения мы приводим здесь потому, что задача вывода х.и.-проекции уравнений Даламбера в полном виде является очень трудоёмкой. Уравнения будут чрезвычайно громоздкими, чтобы можно было получить какие-либо однозначные выводы. Поэтому здесь мы ограничимся выводом х.и.-уравнений Даламбера для электромагнитного поля в неинерциальной системе отсчёта пространства Минковского. Впрочем, это не касается всех остальных параграфов этой главы.

Вычисляя х.и.-проекции четырёхмерных уравнений Даламбера

$$\square A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha \quad (3.70)$$

с помощью общих формул (2.168, 2.169) и учитывая, что наблюдаемая плотность заряда $\rho = \frac{g_{0\alpha} j^\alpha}{c \sqrt{g_{00}}}$, получаем

$$\begin{aligned} * \square \varphi - \frac{1}{c^3} \frac{\partial}{\partial t} (F_k q^k) - \frac{1}{c^3} F_i \frac{\partial q^i}{\partial t} + \frac{1}{c^2} F^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + h^{ik} \Delta_{ik}^m \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} - \\ - h^{ik} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x^i} (A_{kn} q^n) + \frac{1}{c} h^{ik} \Delta_{ik}^m A_{mn} q^n = 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned}
& {}^* \square A^i + \frac{1}{c^2} \frac{{}^* \partial}{\partial t} (A_k^i q^k) + \frac{1}{c^2} A_k^i \frac{{}^* \partial q^k}{\partial t} - \frac{1}{c^3} \frac{{}^* \partial (\varphi F^i)}{\partial t} - \\
& - \frac{1}{c^3} F^i \frac{{}^* \partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} F^k \frac{{}^* \partial q^i}{\partial x^k} - \frac{1}{c} A^{mi} \frac{{}^* \partial \varphi}{\partial x^m} + \frac{1}{c^2} \Delta_{km}^i q^m F^k - \\
& - h^{km} \left\{ \frac{{}^* \partial}{\partial x^k} (\Delta_{mn}^i q^n) + \frac{1}{c} \frac{{}^* \partial}{\partial x^k} (\varphi A_m^i) \right\} + \\
& + (\Delta_{kn}^i \Delta_{mp}^n - \Delta_{km}^n \Delta_{np}^i) q^p + \frac{\varphi}{c} (\Delta_{kn}^i A_m^n - \Delta_{km}^n A_n^i) + \\
& + \Delta_{kn}^i \frac{{}^* \partial q^n}{\partial x^m} - \Delta_{km}^n \frac{{}^* \partial q^i}{\partial x^n} \left. \right\} = \frac{4\pi}{c} j^i. \tag{3.72}
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что физические характеристики пространства отсчёта F^i , A_{ik} , D_{ik} и криволинейность трёхмерных траекторий (величины Δ_{km}^i) являются дополнительными “источниками”, которые, наряду с чисто электромагнитными источниками φ и j^i , формируют волны, бегущие по электромагнитному полю.

Теперь проанализируем полученные уравнения (3.71, 3.72). В галилеевой системе отсчёта в пространстве Минковского метрика имеет вид (3.5) и, поэтому, х.и.-оператор Даламбера ${}^* \square$ (2.163) принимает вид обычного оператора Даламбера ${}^* \square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square$. Тогда полученная система уравнений (3.71, 3.72) принимает вид

$$\square \varphi = 4\pi \rho, \quad \square q^i = -\frac{4\pi}{c} j^i, \tag{3.73}$$

что полностью соответствует уравнениям классической электродинамики (3.39, 3.40).

Теперь вновь вернёмся к полученным х.и.-уравнениям Даламбера (3.71, 3.72). Чтобы облегчить их анализ, обозначим совокупность членов в левых частях после х.и.-оператора Даламбера величиной T в скалярном уравнении (3.71) и величиной B^i в векторном уравнении (3.72). Затем, перенеся эти величины в правые части уравнений и раскрыв выражения для оператора ${}^* \square$ (2.163), получаем

$$\frac{1}{c^2} \frac{{}^* \partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{ik} {}^* \nabla_i {}^* \nabla_k \varphi = T + 4\pi \rho, \tag{3.74}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{{}^* \partial^2 q^i}{\partial t^2} - h^{mk} {}^* \nabla_m {}^* \nabla_k q^i = B^i + \frac{4\pi}{c} j^i, \tag{3.75}$$

где $h^{ik} {}^* \nabla_i {}^* \nabla_k = {}^* \Delta$ х.и.-оператор Лапласа. Получились две группы х.и.-уравнений распространения волн поля с источником: для скалярного потенциала (3.74) и вектор -потенциала (3.75) электромагнитного поля, соответственно. Из структуры их частей видно: когда потенциалы φ и являются стационарными (т.е. не зависят от времени), то волновые уравнения Даламбера превращаются в уравнения Лапласа, описывающие статические состояния поля

$${}^* \Delta \varphi = T + 4\pi\rho, \quad (3.76)$$

$${}^* \Delta q^i = B^i + \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (3.77)$$

Поле является однородным в каком-либо направлении, если его производная в этом направлении равна нулю. В римановом пространстве поле однородно, если его абсолютная (общековариантная) производная равна нулю. При проецировании на пространство и на время в сопутствующей системе отсчёта неоднородность тензорного поля характеризует отличие от х.и.-производной ${}^* \nabla_i$. Иначе говоря, если для какой-то х.и.-величины A выполняется условие ${}^* \nabla_i A = 0$, то это поле *наблюдается* как однородное.

Итак, х.и.-оператор d^{\wedge} Аламбера ${}^* \square$ есть разность между членом, характеризующим наблюдаемую нестационарность поля, и членом, характеризующим наблюдаемую неоднородность поля. Если электромагнитное поле стационарно и однородно, то левые части уравнений Даламбера (3.74, 3.75) равны нулю: поле не порождает электромагнитных волн (т.е. поле не является волновым).

В неоднородном стационарном электромагнитном поле ${}^* \nabla_i \neq 0$ и $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} = 0$. В этом случае полученные нами х.и.-уравнения Даламбера (3.74, 3.75) “теряют” временизависимые члены и, таким образом, описывают стоячую электромагнитную волну

$$-h^{ik} {}^* \nabla_i {}^* \nabla_k \varphi = T + 4\pi\rho, \quad (3.78)$$

$$-h^{mk} {}^* \nabla_m {}^* \nabla_k q^i = B^i + \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (3.79)$$

Если электромагнитное поле однородно, но нестационарно, тогда, соответственно, ${}^* \nabla_i = 0$ и $\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \neq 0$. В этом случае х.и.-уравнения Даламбера описывают изменение данного электромагнитного поля

во времени в зависимости от состояния источников данного поля (распределённых зарядов и токов)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = T + 4\pi\rho, \quad (3.80)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 q^i}{\partial t^2} = B^i + \frac{4\pi}{c} j^i. \quad (3.81)$$

В инерциальной системе отсчёта, когда символы Кристоффеля равны нулю и, соответственно, ${}^* \nabla_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$, х.и.-скалярное уравнение Даламбера (3.74) принимает вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} = T + 4\pi\rho. \quad (3.82)$$

В этом случае левая часть принимает наиболее простой вид, что позволяет более детально исследовать уравнение Даламбера для скалярного поля. Причём, как известно из теории колебаний в математической физике, в обычных (не хронометрически инвариантных) уравнениях Даламбера

$$\square \varphi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} \quad (3.83)$$

член a представляет собой абсолютную величину трёхмерной скорости волн, распространяющихся по полю скалярного электромагнитного потенциала φ .

Раскрывая х.и.-производные по пространственным координатам (3.46), преобразуем скалярное уравнение Даламбера к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{2v^k}{c^2 - w} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial t} + \\ + \frac{1}{c^2 - w} h^{ik} \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} v^k F_k \frac{\partial \varphi}{\partial t} = T + 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (3.84)$$

где $v^2 = h_{ik} v^i v^k$, а вторая х.и.-производная по времени выражается через обычные производные как

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^3} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.85)$$

Отсюда видно: чем больше квадрат скорости вращения пространства v^2 , тем меньшее влияние на распространение волн оказывает наблюдаемая х.и.-нестационарность поля $\frac{* \partial \varphi}{\partial t}$. В пределе, когда $v \rightarrow c$, оператор Даламбера преобразуется в оператор Лапласа, т.е. волновое уравнение Даламбера трансформируется в стационарное уравнение Лапласа. При малых скоростях вращения пространства $v \ll c$ наблюдаемые волны поля скалярного потенциала распространяются со скоростью света. В общем случае абсолютная величина наблюдаемой скорости распространения волн скалярного электромагнитного потенциала $v_{(\varphi)}$ получается равной

$$v_{(\varphi)} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.86)$$

Исследуя выражение для х.и.-величины (3.85), представляющей собой наблюдаемое ускорения “наращивания” во времени скалярного потенциала φ , мы видим, что оно отличается от координатного ускорения тем сильнее, чем больше гравитационный потенциал и скорость его изменения во времени

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 \frac{* \partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{1}{c^2 - w} \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \quad (3.87)$$

В предельном случае, когда $w \rightarrow c^2$ (состояние пространства и материи, приближающееся к гравитационному коллапсу), наблюдаемое ускорение “нарастания” скалярного потенциала электромагнитного поля становится исчезающе малым, а координатная скорость “нарастания” скалярного потенциала $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, наоборот, становится бесконечно большой. Однако в обычных условиях гравитационный потенциал w вносит лишь небольшие поправки в ускорение и скорость наращивания потенциала φ .

Всё вышесказанное о физически наблюдаемой скалярной величине $\frac{* \partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ верно и для векторной наблюдаемой величины $\frac{* \partial^2 q^i}{\partial t^2}$, поскольку х.и.-оператор Даламбера $* \square = \frac{1}{c^2} \frac{* \partial^2}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{* \partial^2}{\partial x^i \partial x^k}$ отличается от скалярной и векторной функций лишь во втором члене — операторе Лапласа, в котором х.и.-производные от скаляра и вектора различаются между собой

$$* \nabla_i \varphi = \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i}, \quad * \nabla_i q^k = \frac{* \partial q^k}{\partial x^i} + \Delta_{im}^k q^m. \quad (3.88)$$

Если скорость вращения пространства и гравитационный потенциал являются пренебрежимо малыми, то х.и.-оператор Даламбера для скалярного потенциала принимает упрощённый вид, с простыми производными вместо х.и.-производных

$$*\square\varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - h^{ik} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k}, \quad (3.89)$$

и электромагнитные волны поля скалярного потенциала φ распространяются со скоростью света.

3.5 Хронометрически инвариантная сила Лоренца. Тензор энергии-импульса электромагнитного поля

В этом параграфе мы выведем выражения для физических наблюдаемых компонент четырёхмерной силы, действующей со стороны электромагнитного поля на электрический заряд в псевдоримановом пространстве. Эта задача будет решена для двух случаев: 1) для точечного заряда; 2) для заряда, распределённого в пространстве. Кроме того, в этом же параграфе мы вычислим физически наблюдаемые компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля.

В трёхмерном евклидовом пространстве классической электродинамики движение заряженной пробной частицы характеризуется векторным уравнением

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E} + \frac{e}{c} [\vec{u}; \vec{H}], \quad (3.90)$$

где $\vec{p} = m\vec{u}$ трёхмерный вектор импульса частицы, и m её релятивистская масса. Выражение, стоящее в правой части этого уравнения, называется *силой Лоренца*. Уравнение, характеризующее изменение кинетической (релятивистской) энергии заряженной частицы

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (3.91)$$

как следствие работы, произведённой электрическим полем по её перемещению, имеет вид

$$\frac{dE}{dt} = e\vec{E} \vec{u}, \quad (3.92)$$

и иначе называется *теоремой живых сил*.

В четырёхмерной форме, благодаря объединению энергии и импульса, в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского оба уравнения (3.90, 3.92) записываются следующим образом

$$m_0 c \frac{dU^\alpha}{ds} = \frac{e}{c} F_{\cdot\sigma}^\alpha U^\sigma, \quad U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad (3.93)$$

и называются *уравнениями Минковского* (здесь $F_{\cdot\sigma}^\alpha$ тензор электромагнитного поля).

Так как в этом случае метрика имеет простой диагональный вид (3.5), то

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2, \quad (3.94)$$

и компоненты четырёхмерной скорости частицы U^α равны

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad U^i = \frac{u^i}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (3.95)$$

где $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ трёхмерная координатная скорость частицы. Так как компоненты $\frac{e}{c} F_{\cdot\sigma}^\alpha U^\sigma$ в галилеевой системе отсчёта равны

$$\frac{e}{c} F_{\cdot\sigma}^{0\sigma} U^\sigma = -\frac{e}{c^2} \frac{E_i u^i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (3.96)$$

$$\frac{e}{c} F_{\cdot\sigma}^{i\sigma} U^\sigma = -\frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \left(e E^i + \frac{e}{c} e^{ikm} u_k H_{*m} \right), \quad (3.97)$$

то временная (скалярная) и пространственные (векторные) компоненты уравнений Минковского (3.93), также в галилеевой системе отсчёта, принимают следующий вид

$$\frac{dE}{dt} = -e E_i u^i, \quad (3.98)$$

$$\frac{dp^i}{dt} = -\left(e E^i + \frac{e}{c} e^{ikm} u_k H_{*m} \right), \quad p^i = m u^i. \quad (3.99)$$

Полученные релятивистские уравнения с точностью до знака в правой части совпадают с теоремой живых сил и уравнениями дви-

жения заряженной частицы классической электродинамики (3.90, 3.91). Причём различие знаков в правых частях обусловлено лишь выбором сигнатурных условий: мы используем сигнатуру пространства-времени (+---), но, если выбрать сигнатуру (-+++), то в правых частях полученных уравнений знак сменится на противоположный.

Перейдём теперь к х.и.-представлению в псевдоримановом пространстве четырёхмерного вектора импульса $\Phi^\alpha = \frac{e}{c} F_{\sigma}^{\alpha} U^\sigma$, приобретаемого частицей за счёт взаимодействия её заряда e с электромагнитным полем.

Согласно теории хронометрических инвариантов, его наблюдаемыми проекциями являются величины

$$T = \frac{e}{c} \frac{F_{0\sigma} U^\sigma}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (3.100)$$

$$B^i = \frac{e}{c} F_{\cdot\sigma}^i U^\sigma = \frac{e}{c} (F_{\cdot 0}^i U^0 + F_{\cdot k}^i U^k), \quad (3.101)$$

так как в псевдоримановом пространстве компоненты четырёхмерного вектора скорости частицы

$$U^0 = \frac{\frac{1}{c^2} v_i v^i \pm 1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)}}, \quad U^i = \frac{v^i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.102)$$

где v^i её трёхмерная наблюдаемая скорость, то, учитывая полученные нами во 2-й главе выражения для компонент ротора (2.143–2.150), получаем

$$T = -\frac{e}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{*\partial\varphi}{\partial x^i} + \frac{1}{c} \frac{*\partial q_i}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_i \right) v^i, \quad (3.103)$$

$$B^i = -\frac{e}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left\{ \pm \left(\frac{*\partial\varphi}{\partial x^k} + \frac{1}{c} \frac{*\partial q_k}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_k \right) h^{ik} + \right. \\ \left. + \left[h^{im} h^{kn} \left(\frac{*\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{*\partial q_n}{\partial x^m} \right) - \frac{2\varphi}{c} A^{ik} \right] v_k \right\}. \quad (3.104)$$

Скаляр T , с точностью до множителя $-\frac{1}{c^2}$, представляет собой работу поля по перемещению заряда e в псевдоримановом про-

пространстве. Вектор B^i с точностью до множителя $\frac{1}{c}$ в нерелятивистском случае представляет собой обычную силу, действующую на заряженную частицу со стороны электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве

$$\Phi^i = c B^i = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} H_{*m} v_k \right) \quad (3.105)$$

и является наблюдаемой силой Лоренца.

Знакопеременность в наших уравнениях получается из-за того, что в псевдоримановом пространстве квадратное уравнение относительно $\frac{dt}{d\tau}$ имеет два корня (1.63). Соответственно, знак “плюс” в силе Лоренца имеет место при движении частиц в будущее (относительно наблюдателя), а знак “минус” — при движении частицы в прошлое. В галилеевой системе отсчёта пространства Минковского нет различия между физическим наблюдаемым временем τ и координатным временем t , поэтому в уравнении для силы Лоренца (3.99), получаемой из уравнений Минковского, знакопеременность отсутствует.

Если движущийся заряд не является точечным, а непрерывно распределён в пространстве (например, представляет собой протяжённое электрически заряженное тело), то четырёхмерная сила Лоренца $\Phi^\alpha = \frac{e}{c} F_{\cdot\sigma}^\alpha U^\sigma$ в уравнениях Минковского (3.93) заменяется на четырёхмерный вектор *плотности силы Лоренца*

$$f^\alpha = \frac{1}{c} F_{\cdot\sigma}^\alpha j^\sigma, \quad (3.106)$$

где четырёхмерный вектор плотности тока $j^\sigma = \{c\rho; j^i\}$ определяется из уравнений Максвелла (3.51)

$$j^\sigma = \frac{c}{4\pi} \nabla_\mu F^{\sigma\mu}. \quad (3.107)$$

Вычисляя физически наблюдаемые компоненты вектора плотности силы Лоренца f^α , мы получаем

$$\frac{f_0}{\sqrt{g_{00}}} = -\frac{1}{c} E_i j^i, \quad (3.108)$$

$$f^i = -\left(\rho E^i + \frac{1}{c} H_{\cdot k}^i j^k \right) = -\left(\rho E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} H_{*m} j_k \right), \quad (3.109)$$

которые в галилеевой системе отсчёта в пространстве Минковского принимают следующий вид

$$\frac{f_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{q}{c} = \frac{1}{c} \vec{E} \vec{j}, \quad (3.110)$$

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{j}; \vec{H}], \quad (3.111)$$

где q обозначает плотность мощности тепла, выделяемого в данном проводнике с током.

Теперь преобразуем плотность силы Лоренца с помощью уравнений Максвелла. Подставляя j^σ (3.107) из 1-й группы общековариантных уравнений Максвелла, получаем

$$\begin{aligned} f_\nu &= \frac{1}{c} F_{\nu\sigma} j^\sigma = \frac{1}{4\pi} F_{\nu\sigma} \nabla_\mu F^{\sigma\mu} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[\nabla_\mu (F_{\nu\sigma} F^{\sigma\mu}) - F^{\sigma\mu} \nabla_\mu F_{\nu\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Переставляя индексы μ и σ , (иначе называемые немymi или свободными индексами), по которым производится суммирование, и учитывая антисимметричность тензора Максвелла $F_{\alpha\beta}$, приводим второе слагаемое к виду

$$\begin{aligned} F^{\sigma\mu} \nabla_\mu F_{\nu\sigma} &= \frac{1}{2} F^{\sigma\mu} (\nabla_\mu F_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma F_{\mu\nu}) = \\ &= -\frac{1}{2} F^{\sigma\mu} \nabla_\nu F_{\mu\sigma} = \frac{1}{2} F^{\sigma\mu} \nabla_\nu F_{\sigma\mu}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

В результате получаем для f_ν (3.112) выражение

$$f_\nu = \frac{1}{4\pi} \nabla_\mu \left(-F^{\mu\sigma} F_{\nu\sigma} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\mu F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right), \quad (3.114)$$

или, в контравариантной форме,

$$f^\nu = \frac{1}{4\pi} \nabla_\mu \left(-F^{\mu\sigma} F_{\cdot\sigma}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right). \quad (3.115)$$

Обозначая величину

$$\frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\sigma} F_{\cdot\sigma}^\nu + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = T^{\mu\nu}, \quad (3.116)$$

получаем

$$f^\nu = \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \quad (3.117)$$

т.е. четырёхмерный вектор плотности силы Лоренца f^ν равен абсолютной дивергенции величины $T^{\mu\nu}$, называемой *тензором энергии-импульса электромагнитного поля*. Из его структуры видно, что он является симметричным $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$, а его след равен нулю (так как след фундаментального метрического тензора $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = \delta_\nu^\nu = 4$)

$$\begin{aligned} T_\nu^\nu &= g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\sigma} F_{\mu\sigma} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(-F^{\mu\sigma} F_{\mu\sigma} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.118)$$

Физически наблюдаемыми х.и.-проекциями тензора энергии-импульса являются величины

$$q = \frac{T_{00}}{g_{00}}, \quad J^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}}, \quad U^{ik} = c^2 T^{ik}, \quad (3.119)$$

где q наблюдаемая *плотность поля*, J^i вектор наблюдаемой *плотности импульса*, и U^{ik} тензор наблюдаемых *напряжений* поля. Вычисляя эти величины для тензора энергии-импульса электромагнитного поля (3.116), получаем

$$q = \frac{E^2 + H^{*2}}{8\pi}, \quad (3.120)$$

$$J^i = \frac{c}{4\pi} \varepsilon^{ikm} E_k H_{*m}, \quad (3.121)$$

$$U^{ik} = q c^2 h^{ik} - \frac{c^2}{4\pi} (E^i E^k + H^{*i} H^{*k}), \quad (3.122)$$

где $E^2 = h_{ik} E^i E^k$ и $H^{*2} = h_{ik} H^{*i} H^{*k}$. Сравнивая выражения для q (3.120) с плотностью энергии электромагнитного поля из классической электродинамики

$$W = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}, \quad (3.123)$$

где $E^2 = (\vec{E}; \vec{E})$ и $H^2 = (\vec{H}; \vec{H})$, мы видим, что вычисленная нами х.и.-величина q представляет собой наблюдаемую плотность энергии

электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве. Сопоставив выражения для х.и.-вектора J^i (3.121) с вектором Пойнтинга классической электродинамики

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E}; \vec{H}), \quad (3.124)$$

мы видим, что J^i представляет собой наблюдаемый вектор Пойнтинга в псевдоримановом пространстве. Соответствие третьей наблюдаемой компоненты U^{ik} (3.122) с величинами классической электродинамики устанавливается по аналогии с механикой сплошных сред, в которой трёхмерный тензор аналогичной структуры является *тензором напряжений* элемента объёма поля. Таким образом, U^{ik} есть х.и.-тензор напряжений электромагнитного поля в псевдоримановом пространстве. Теперь мы можем получить тождества для х.и.-компонент вектора плотности силы Лоренца, правые части которых уже выражены через плотность заряда и плотность тока (3.108, 3.109), т.е. через источники электромагнитного поля, а левые части с помощью уравнения $f^v = \nabla_\mu T^{\mu v}$ мы выразим через наблюдаемые компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля (3.120–3.122). Используя готовые формулы для наблюдаемых компонент абсолютной дивергенции симметричного тензора 2-го ранга (2.138, 2.139), получаем

$$\frac{* \partial q}{\partial t} + qD + \frac{1}{c^2} D_{ij} U^{ij} + * \tilde{\nabla}_i J^i - \frac{1}{c^2} F_i J^i = -\frac{1}{c} E_i J^i, \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned} \frac{* \partial J^k}{\partial t} + DJ^k + 2(D_i^k + A_{*i}^k) J^i + * \tilde{\nabla}_i U^{ik} - qF^k = \\ = -\left(\rho E^k + \frac{1}{c} \varepsilon^{kim} H_{*i} j_m \right). \end{aligned} \quad (3.126)$$

Первое х.и.-тождество (3.125) показывает, что наблюдаемое изменение во времени плотности электромагнитного поля q определяется следующими факторами:

- 1) скоростью изменения наблюдаемого эталонного объёма, занимаемого электромагнитным полем (член qD);
- 2) изменением наблюдаемого напряжения поля под действием поверхностных сил объёмной деформации на границах элемента объёма (член $D_{ij} U^{ij}$);

- 3) гравитационно-инерциальной силой, увеличивающей/уменьшающей наблюдаемую плотность импульса поля (член $F_i J^i$);
- 4) наблюдаемым “перепадом” (х.и.-физической дивергенцией) плотности импульса поля (член ${}^* \widetilde{\nabla}_i J^i$);
- 5) величинами и взаимной ориентацией вектора плотности тока j^i и вектора электрической напряжённости E^i .

Второе х.и.-тождество (3.126) показывает, что наблюдаемое изменение во времени вектора плотности импульса электромагнитного поля J^k определяется факторами:

- 1) скоростью изменения наблюдаемого эталонного объёма пространства (член DJ^k);
- 2) изменением деформационных и кориолисовых сил пространства, учитываемых членом $2(D_i^k + A_i^k)J^i$;
- 3) влиянием гравитационно-инерциальной силы на наблюдаемую плотность поля (член qF^k);
- 4) наблюдаемой “пространственной вариацией” напряжений поля ${}^* \widetilde{\nabla}_i U^{ik}$;
- 5) наблюдаемой плотностью силы Лоренца — правая часть тождества, определяемая величиной $f^k = -\left(\rho E^k + \frac{1}{c} \varepsilon^{kim} H_{*i} j_m\right)$.

И, в заключение, рассмотрим частный случай, когда электромагнитное поле является изотропным. Формальное определение изотропного поля через тензор Максвелла представляет собой совокупность условий [20]

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 0, \quad F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu} = 0, \quad (3.127)$$

и означает, что оба инварианта поля $J_1 = F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ и $J_2 = F_{\mu\nu} F^{*\mu\nu}$ (3.25, 3.26) равны нулю. В х.и.-записи, с учётом (3.28), эти условия принимают вид

$$E^2 = H^{*2}, \quad E_i H^{*i} = 0. \quad (3.128)$$

Отсюда видно, что электромагнитное поле в псевдоримановом пространстве наблюдается как изотропное, если в системе отсчёта наблюдателя трёхмерные длины векторов напряжённостей электрического и магнитного полей равны между собой, а вектор Пойнтинга J^i (3.121) равен нулю

$$J^i = \frac{c}{4\pi} \varepsilon^{ikm} E_k H_{*m} = 0. \quad (3.129)$$

В терминах наблюдаемых компонент тензора энергии-импульса (3.120, 3.121) полученные условия (3.128) также означают, что

$$J = cq, \quad (3.130)$$

где $J = \sqrt{J^2}$ и $J^2 = h_{ik} J^i J^k$. Другими словами, наблюдаемая плотность импульса J любого изотропного электромагнитного поля зависит только от плотности этого поля q .

3.6 Вывод уравнений движения заряженной частицы методом параллельного переноса

В этом параграфе мы выведем х.и.-динамические уравнения движения пробной заряженной массовой частицы в четырёхмерном псевдоримановом пространстве. Естественно, подразумевается, что в пространстве присутствует также и электромагнитное поле. В принципе, приведённым здесь методом можно вывести и уравнения движения заряженной частицы, не являющейся пробной*.

Итак, искомые уравнения суть х.и.-проекции на время и на пространство общековариантных уравнений параллельного переноса в смысле Леви-Чивиты четырёхмерного суммарного вектора заряженной массовой частицы

$$Q^\alpha = P^\alpha + \frac{e}{c^2} A^\alpha, \quad (3.131)$$

где $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ четырёхмерный динамический вектор частицы, движущейся (в данном случае) по негеодезической траектории, и $\frac{e}{c^2} A^\alpha$

*Частица называется пробной, если её заряд и масса настолько малы, что не влияют на электромагнитное и гравитационное поле, в которых она движется. Массовыми, т.е. обладающими ненулевой массой, называются частицы, движущиеся вдоль неизотропных траекторий.

Существует и другой подход к движению частиц в псевдоримановом пространстве. Он основан на эластодинамике пространственно-временного континуума — расширению общей теории относительности, которое ввёл десять лет назад Пьер А. Миллет на основе анализа деформации пространства-времени в терминах механики сплошных сред. В частности, он показал, что само массивное тело является частью вращающейся ткани пространства-времени. См. его основополагающую статью и последующую монографию на эту тему: Millette P. A. *Elastodynamics of the spacetime continuum. The Abraham Zelmanov Journal*, 2012, vol. 5, 221–277. Millette P. A. *Elastodynamics of the Spacetime Continuum. The 2nd expanded edition*, American Research Press, Rehoboth (New Mexico), 2019, 415 pages.

четырёхмерный импульс, приобретаемый частицей за счёт взаимодействия её заряда e с электромагнитным полем A^α и отклоняющий её траекторию от геодезической линии. В такой постановке задачи параллельный перенос суперпозиции негеодезического собственного вектора частицы и вектора, отклоняющего эту частицу от геодезической траектории, является геодезическим

$$\frac{d}{ds} \left(P^\alpha + \frac{e}{c^2} A^\alpha \right) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \left(P^\mu + \frac{e}{c^2} A^\mu \right) \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (3.132)$$

По определению, геодезическая линия — это линия неизменного направления, т.е. такая линия, вдоль которой всякий вектор, касательный к ней в одной некоторой точке и переносимый параллельно самому себе вдоль этой линии, остаётся касательным к ней в любой другой точке вдоль всей этой линии.

Уравнения движения частицы можно получить и другим способом, рассматривая движение вдоль линий наименьшей (экстремальной) длины с помощью принципа наименьшего действия. Таким образом, линии экстремальной длины одновременно являются и линиями неизменного направления. Однако, например, в пространствах с неметрической геометрией понятие длины не определено, следовательно, не определены и линии экстремальной длины, так что вывести уравнения движения методом наименьшего действия невозможно. Тем не менее, даже в неметрической геометрии можно определить линии неизменного направления и параметр дифференцирования вдоль них. Поэтому можно сказать, что в метрических пространствах, к которым относится и риманово пространство, линии экстремальной длины представляют собой лишь частный случай линий неизменного направления.

Итак, общие формулы для х.и.-проекций уравнений параллельного переноса, полученные нами во 2-й главе, имеют вид

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{ds} + \frac{1}{c} \left(-F_i \tilde{q}^i \frac{d\tau}{ds} + D_{ik} \tilde{q}^i \frac{dx^k}{ds} \right) = 0, \quad (3.133)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}^i}{ds} + \left(\frac{\tilde{\varphi}}{c} \frac{dx^k}{ds} + \tilde{q}^k \frac{d\tau}{ds} \right) (D_k^i + A_k^i) - \\ - \frac{\tilde{\varphi}}{c} F^i \frac{d\tau}{ds} + \Delta_{mk}^i \tilde{q}^m \frac{dx^k}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (3.134)$$

где $\tilde{\varphi}$ и \tilde{q}^i наблюдаемые проекции суммарного вектора заряженной частицы Q^α (3.131) на время и на пространство

$$\tilde{\varphi} = b_\alpha Q^\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(P_0 + \frac{e}{c^2} A_0 \right), \quad (3.135)$$

$$\tilde{q}^i = h_\alpha^i Q^\alpha = Q^i = P^i + \frac{e}{c^2} A^i. \quad (3.136)$$

Наблюдаемые проекции динамического вектора вещественной массовой частицы равны

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m, \quad P^i = \frac{1}{c} m v^i = \frac{1}{c} p^i, \quad (3.137)$$

где знак “плюс” имеет место при движении частицы (относительно наблюдателя) в будущее, знак “минус” имеет место при движении частицы в прошлое, а $p^i = m \frac{dx^i}{d\tau}$ обозначает трёхмерный х.и.-импульс частицы.

Вычисляя физически наблюдаемые х.и.-проекции четырёхмерного импульса $\frac{e}{c^2} A^\alpha$, мы получаем

$$\frac{e}{c^2} \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{e}{c^2} \varphi, \quad \frac{e}{c^2} A^i = \frac{e}{c^2} q^i, \quad (3.138)$$

где φ скалярный потенциал и q^i вектор-потенциал электромагнитного поля — х.и.-компоненты четырёхмерного потенциала A^α (3.8). Тогда х.и.-величины $\tilde{\varphi}$ и \tilde{q}^i , являющиеся физически наблюдаемыми проекциями суммарного вектора заряженной массовой частицы Q^α (3.135, 3.136), принимают вид

$$\tilde{\varphi} = \pm m + \frac{e}{c^2} \varphi, \quad (3.139)$$

$$\tilde{q}^i = \frac{1}{c} \left(p^i + \frac{e}{c^2} q^i \right). \quad (3.140)$$

Теперь подставим эти значения $\tilde{\varphi}$ и \tilde{q}^i в общие формулы для уравнений движения (3.133, 3.134), чтобы получить х.и.-уравнения движения заряженной частицы.

Перенося члены, характеризующие электромагнитное взаимодействие, в правые части, мы получаем х.и.-уравнения движения для массовой заряженной частицы нашего мира, движущейся отно-

сительно наблюдателя в будущее (прямой ход времени),

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k = -\frac{e}{c^2} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c^3} (F_i q^i - D_{ik} q^i v^k), \quad (3.141)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(mv^i)}{d\tau} - mF^i + 2m(D_k^i + A_k^i)v^k + m\Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -\frac{e}{c} \frac{dq^i}{d\tau} - \frac{e}{c} \left(\frac{\varphi}{c} v^k + q^k \right) (D_k^i + A_k^i) + \frac{e\varphi}{c^2} F^i - \frac{e}{c} \Delta_{nk}^i q^n v^k, \end{aligned} \quad (3.142)$$

и для частицы зазеркалья, движущей относительно наблюдателя в прошлое (обратный ход времени),

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k = -\frac{e}{c^2} \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c^3} (F_i q^i - D_{ik} q^i v^k), \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(mv^i)}{d\tau} + mF^i + m\Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -\frac{e}{c} \frac{dq^i}{d\tau} - \frac{e}{c} \left(\frac{\varphi}{c} v^k + q^k \right) (D_k^i + A_k^i) + \frac{e\varphi}{c^2} F^i - \frac{e}{c} \Delta_{nk}^i q^n v^k. \end{aligned} \quad (3.144)$$

Левые части полученных уравнений полностью совпадают с левыми частями уравнений движения свободных массовых частиц. Отличие лишь в том, что здесь стоят наблюдаемые характеристики несвободной частицы, характеризующие её негеодезическое движение (поэтому правые части здесь не равны нулю). Правые части характеризуют воздействие на частицу электромагнитного поля (члены, содержащие φ и q^i), а также воздействие свойств пространства (гравитационно-инерциальной силы F^i , вращения A_{ik} , деформации D_{ik} и кривизны Δ_{nk}^i). Для незаряженной частицы ($e = 0$), правые части обращаются в нуль, и эти уравнения полностью совпадают с х.и.-уравнениями движения свободной массовой частицы в нашем мире (1.59, 1.60) и в зазеркалье (1.64, 1.65).

Теперь рассмотрим правые части более подробно. Они симметричны для частиц, движущихся в будущее и в прошлое и, при смене знака заряда на противоположный, также меняют свой знак. Обозначим T правые части временных проекций уравнений движения (3.141, 3.143). Так как величину $\frac{d\varphi}{d\tau}$ можно представить в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{*d\varphi}{dt} + v^i \frac{*d\varphi}{dx^i}, \quad (3.145)$$

тогда, используя выражение для х.и.-напряжённости электрического поля в ковариантной форме E_i (3.14), мы можем записать величину T в следующем виде

$$T = -\frac{e}{c^2} E_i v^i - \frac{e}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{e}{c^3} \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} - D_{ik} q^k \right) v^i + \frac{e}{c^3} \left(q^i - \frac{\varphi}{c} v^i \right) F_i. \quad (3.146)$$

Подставляя это выражение во временные проекции уравнений движения (3.141, 3.143) и умножая их на c^2 , мы получаем уравнения для энергии (теорему живых сил) частиц, движущихся в будущее и в прошлое, соответственно

$$\frac{dE}{d\tau} - m F_i v^i + m D_{ik} v^i v^k = -e E_i v^i - e \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} - D_{ik} q^k \right) v^i + \frac{e}{c} \left(q^i - \frac{\varphi}{c} v^i \right) F_i, \quad (3.147)$$

$$-\frac{dE}{d\tau} - m F_i v^i + m D_{ik} v^i v^k = -e E_i v^i - e \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{e}{c} \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} - D_{ik} q^k \right) v^i + \frac{e}{c} \left(q^i - \frac{\varphi}{c} v^i \right) F_i, \quad (3.148)$$

где $E = \pm mc^2$ релятивистская энергия частицы и $e E_i v^i$ работа, затраченная электрической составляющей поля на перемещение заряда за единицу времени.

Полученные временные наблюдаемые х.и.-проекции уравнений движения заряженной частицы (3.147, 3.148) представляют собой *теорему живых сил в псевдоримановом пространстве*, записанную в х.и.-форме, т.е. выраженную через физически наблюдаемые величины. Как нетрудно убедиться, в галилеевой системе отсчёта в пространстве Минковского наше уравнение (3.147), полученное для частиц с прямым ходом времени, принимает вид временной компоненты уравнений Минковского (3.98).

В трёхмерном евклидовом пространстве полученное уравнение (3.147) преобразуется в обычную теорему живых сил классической электродинамики $\frac{dE}{dt} = e \vec{E} \vec{v}$ (3.92).

Теперь обратимся к правым частям пространственных проекций уравнений движения (3.142, 3.144). Обозначим их M^i , так как

они одинаковы для частиц, движущихся в будущее и в прошлое, и меняют знак при изменении знака заряда частицы. Поскольку

$$\frac{dq^i}{d\tau} = \frac{*dq^i}{dt} + v^k \frac{*dq^i}{dx^k}, \quad (3.149)$$

и в ней, учитывая, что $\frac{*dh^{ik}}{dt} = -2D^{ik}$ (1.40)

$$\frac{*dq^i}{dt} = \frac{*d}{dt} (h^{ik} q_k) = -2D_k^i q^k + h^{ik} \frac{*dq_k}{dt}, \quad (3.150)$$

то M^i принимает вид

$$\begin{aligned} M^i = & -\frac{e}{c} h^{ik} \frac{*dq_k}{dt} + \frac{e\varphi}{c^2} (F^i + A^{ik} v_k) + \frac{e}{c} A^{ik} q_k + \\ & + \frac{e}{c} \left(q^k - \frac{\varphi}{c} v^k \right) D_k^i - \frac{e}{c} v^k \frac{*dq^i}{dx^k} - \frac{e}{c} \Delta_{nk}^i q^n v^k. \end{aligned} \quad (3.151)$$

Используя выражения для х.и.-компонент тензора Максвелла E^i (3.11) и H^{ik} (3.12) $F_{\alpha\beta}$, запишем первые два члена M^i (3.151) в виде

$$-\frac{e}{c} h^{ik} \frac{*dq_k}{dt} + \frac{e\varphi}{c^2} F^i = -eE^i + eh^{ik} \frac{*d\varphi}{dx^k}, \quad (3.152)$$

а третий член как

$$\frac{e\varphi}{c^2} A^{ik} v_k = \frac{e}{2c} h^{im} v^n \left(\frac{*dq_m}{dx^n} - \frac{*dq_n}{dx^m} \right) - \frac{e}{2c} H^{ik} v_k. \quad (3.153)$$

Величину H^{ik} запишем как $H^{ik} = \varepsilon^{mik} H_{*m}$ (3.56). Тогда предыдущее (3.153) примет вид

$$\frac{e\varphi}{c^2} A^{ik} v_k = \frac{e}{2c} h^{im} v^n \left(\frac{*dq_m}{dx^n} - \frac{*dq_n}{dx^m} \right) - \frac{e}{2c} \varepsilon^{ikm} H_{*m} v_k, \quad (3.154)$$

а исходная величина (3.151)

$$\begin{aligned} M^i = & -e \left(E^i + \frac{1}{2c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right) + \frac{e}{c} \left(q^k - \frac{\varphi}{c} v^k \right) D_k^i + \\ & + eh^{ik} \frac{*d\varphi}{dx^k} + \frac{e}{c} A^{ik} q_k + \frac{e}{2c} h^{im} v^k \left(\frac{*dq_m}{dx^k} - \frac{*dq_k}{dx^m} \right) - \\ & - \frac{e}{c} v^k \frac{*dq^i}{dx^k} - \frac{e}{c} \Delta_{nk}^i q^n v^k. \end{aligned} \quad (3.155)$$

Сумму последних трёх членов в M^i (3.155) получим, подставив $q_m = h_{mn}q^n$, $q_k = h_{kn}q^n$ и х.и.-символы Кристоффеля (1.47)

$$\begin{aligned} & \frac{e}{2c} h^{im} v^k \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^m} \right) - \frac{e}{c} v^k \frac{* \partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{c} \Delta_{nk}^i q^n v^k = \\ & = -\frac{e}{2c} h^{im} v_k \frac{* \partial q^k}{\partial x^m} - \frac{e}{2c} v^k \frac{* \partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{2c} h^{im} q^n v^k \frac{* \partial h_{km}}{\partial x^n}. \end{aligned} \quad (3.156)$$

С учётом всех этих преобразований величина M^i (правая часть пространственных компонент х.и.-уравнений движения массовой заряженной частицы) принимает окончательный вид

$$\begin{aligned} & \frac{d(mv^i)}{d\tau} - mF^i + 2m(D_k^i + A_{k \cdot}^i) v^k + m\Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ & = -e \left(E^i + \frac{1}{2c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right) + \\ & + \frac{e}{c} \left(q^k - \frac{\varphi}{c} v^k \right) D_k^i + e h^{ik} \frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A^{ik} q_k - \\ & - \frac{e}{2c} h^{im} v_k \frac{* \partial q^k}{\partial x^m} - \frac{e}{2c} v^k \frac{* \partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{2c} h^{im} q^n v^k \frac{* \partial h_{km}}{\partial x^n}, \end{aligned} \quad (3.157a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d(mv^i)}{d\tau} + mF^i + m\Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ & = -e \left(E^i + \frac{1}{2c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right) + \\ & + \frac{e}{c} \left(q^k - \frac{\varphi}{c} v^k \right) D_k^i + e h^{ik} \frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{e}{c} A^{ik} q_k - \\ & - \frac{e}{2c} h^{im} v_k \frac{* \partial q^k}{\partial x^m} - \frac{e}{2c} v^k \frac{* \partial q^i}{\partial x^k} - \frac{e}{2c} h^{im} q^n v^k \frac{* \partial h_{km}}{\partial x^n}. \end{aligned} \quad (3.157b)$$

Отсюда видно, что первый член $-e \left(E^i + \frac{1}{2c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right)$ в правой части отличается от х.и.-силы Лоренца $\Phi^i = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right)$ коэффициентом $\frac{1}{2}$ при магнитной составляющей этой силы. В §3.9 мы вычислим, при какой структуре электромагнитного потенциала A^α остальные члены в формуле для M^i (3.155) полностью компенсируют этот коэффициент $\frac{1}{2}$ так, что в правых частях х.и.-пространственных уравнений движения заряженной частицы стоит только сила Лоренца.

3.7 Уравнения движения заряженной частицы, следующие из принципа наименьшего действия как частный случай полученных уравнений движения

В этом параграфе мы получим х.и.-представление уравнений движения массовой заряженной частицы, выведенных из принципа наименьшего действия. Этот принцип состоит в том, что действие S по перемещению частицы вдоль траекторий кратчайшей длины является минимальным, т.е. вариация действия равна нулю

$$\delta \int_a^b dS = 0. \quad (3.158)$$

Таким образом, уравнения движения, получаемые из принципа наименьшего действия, являются уравнениями линий наименьшей длины.

Итак, как известно [10], элементарное действие гравитационного и электромагнитного полей по перемещению заряженной массовой частицы имеет следующий вид

$$dS = -m_0 c ds - \frac{e}{c} A_\alpha dx^\alpha, \quad (3.159)$$

где ds элементарный пространственно-временной интервал. Отсюда видно, что эта величина применима для описания частиц, движущихся только вдоль неизотропных траекторий ($ds \neq 0$). Вместе с тем, вывод уравнений движения методом параллельного переноса (линии неизменного направления) применим как к неизотропным так и к изотропным траекториям, вдоль которых $ds = 0$. Более того, параллельный перенос применим также и для неримановых геометрий, в частности, для вывода уравнения движения частиц в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве). Поэтому уравнения линий наименьшей длины, получаемые методом наименьшего действия, представляют собой лишь частный случай линий неизменного направления, получаемых в результате параллельного переноса.

Однако вернёмся к принципу наименьшего действия (3.158). Это условие для массовой заряженной частицы принимает вид

$$\delta \int_a^b dS = -\delta \int_a^b m_0 c ds - \delta \int_a^b \frac{e}{c} A_\alpha dx^\alpha = 0, \quad (3.160)$$

где первый член можно записать в виде

$$\begin{aligned} -\delta \int_a^b m_0 c ds &= -\int_a^b m_0 c DU_\alpha \delta x^\alpha = \\ &= \int_a^b m_0 c (dU_\alpha ds - \Gamma_{\alpha,\mu\nu} U^\mu dx^\nu) \delta x^\alpha. \end{aligned} \quad (3.161)$$

Вариацию второго интеграла из (3.160) представим следующим образом

$$-\frac{e}{c} \delta \int_a^b A_\alpha dx^\alpha = -\frac{e}{c} \left(\int_a^b \delta A_\alpha dx^\alpha + \int_a^b A_\alpha d\delta x^\alpha \right). \quad (3.162)$$

Проинтегрируем второй член по частям

$$\int_a^b A_\alpha d\delta x^\alpha = A_\alpha \delta x^\alpha \Big|_a^b - \int_a^b dA_\alpha \delta x^\alpha. \quad (3.163)$$

Здесь первый член равен нулю, так как интеграл варьируется при заданных значениях координат пределов интегрирования. Учитывая, что вариация ковариантного вектора равна

$$\delta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \delta x^\beta, \quad dA_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\beta, \quad (3.164)$$

получаем вариацию электромагнитной части действия

$$-\frac{e}{c} \delta \int_a^b A_\alpha dx^\alpha = -\frac{e}{c} \int_a^b \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} dx^\alpha \delta x^\beta - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \delta x^\alpha dx^\beta \right). \quad (3.165)$$

Поменяв местами свободные индексы α и β в первом члене этого выражения и учитывая вариацию гравитационной части действия (3.161), получаем вариацию суммарного действия (3.160) в виде

$$\delta \int_a^b dS = \int_a^b \left[m_0 c (dU_\alpha - \Gamma_{\alpha,\mu\nu} U^\mu dx^\nu) - \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} dx^\beta \right] \delta x^\alpha, \quad (3.166)$$

где $F_{\alpha\beta} = \frac{A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$ тензор Максвелла и $U^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ четырёхмерная скорость частицы. Из-за произвольности величины δx^α подынтегральное выражение всегда равно нулю, и, таким образом, мы получаем общековариантные уравнения движения массовой заряженной частицы

$$m_0 c \left(\frac{dU_\alpha}{ds} - \Gamma_{\alpha,\mu\nu} U^\mu U^\nu \right) = \frac{e}{c} F_{\alpha\beta} U^\beta, \quad (3.167)$$

или, подняв индекс α , в более привычном виде

$$m_0 c \left(\frac{dU^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu \right) = \frac{e}{c} F_{\beta}^{\alpha} U^\beta. \quad (3.168)$$

Иными словами, полученные нами уравнения представляют собой уравнения Минковского в псевдоримановом пространстве. В галилеевой системе отсчёта в пространстве Минковского они преобразуются в обычные релятивистские уравнения (3.93).

Теперь выведем х.и.-проекции уравнений Минковского в псевдоримановом пространстве. Проецируя общековариантные уравнения (3.168) на время и на пространство в сопутствующей системе отсчёта, получаем для заряженной массовой частицы нашего мира

$$\frac{dE}{d\tau} - m F_i v^i + m D_{ik} v^i v^k = -e E_i v^i, \quad (3.169)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(m v^i)}{d\tau} - m F^i + 2m \left(D_k^i + A_k^i \right) v^k + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right), \end{aligned} \quad (3.170)$$

и для заряженной массовой частицы зазеркалья

$$- \frac{dE}{d\tau} - m F_i v^i + m D_{ik} v^i v^k = -e E_i v^i, \quad (3.171)$$

$$\frac{d(m v^i)}{d\tau} + m F^i + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right). \quad (3.172)$$

Скалярные уравнения движения, как в нашем мире, так и в зазеркалье, представляют собой теорему живых сил. А векторные уравнения движения — трёхмерные уравнения Минковского, в правой части которых стоит х.и.-сила Лоренца (вычисленная в псевдоримановом пространстве). Как нетрудно убедиться, в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского эти уравнения принимают вид теоремы живых сил (3.92) и обычных уравнений движения заряженной частицы (3.90) классической электродинамики. Очевидно, что правые части этих уравнений (3.169–3.172), полученных методом наименьшего действия, отличаются от правых частей уравнений движения (3.146, 3.157), выведенных методом параллельного переноса. Отличие состоит в отсутствии здесь

(3.169–3.172) некоторых членов, характеризующих структуру электромагнитного поля и самого пространства. Впрочем, как мы уже упоминали, линии наименьшей длины (наименьшего действия), являются лишь частным случаем линий неизменного направления, определяемых параллельным переносом. Поэтому неудивительно, что в уравнениях параллельного переноса, как более общих, имеются дополнительные члены, учитывающие структуру пространства и структуру электромагнитного поля.

3.8 Геометрическая структура четырёхмерного потенциала электромагнитного поля

В этом параграфе мы проведём поиск такой структуры четырёхмерного потенциала электромагнитного поля A^α , при которой длина суммарного вектора $Q^\alpha = P^\alpha + \frac{e}{c^2} A^\alpha$ сохраняется при параллельном переносе. Известно, что при параллельном переносе в смысле Леви-Чивиты длина переносимого вектора Q^α сохраняется, т.е. выполняется условие $Q_\alpha Q^\alpha = const$. Так как квадрат длины вектора в псевдоримановом пространстве является инвариантом, это условие должно выполняться в любой системе отсчёта, в том числе для наблюдателя, сопутствующего своему телу отсчёта. Поэтому мы вполне можем провести анализ этого условия, записав его через физически наблюдаемые величины в сопутствующей системе отсчёта (в х.и.-виде). Компоненты суммарного вектора Q^α в сопутствующей системе отсчёта имеют вид

$$Q_0 = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right), \quad (3.173)$$

$$Q^0 = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left[\left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right) + \frac{1}{c^2} v_i \left(mv^i + \frac{e}{c} q^i\right) \right], \quad (3.174)$$

$$Q_i = -\frac{1}{c} \left(mv_i + \frac{e}{c} q_i\right) - \frac{1}{c} \left(\pm m + \frac{e\varphi}{c^2}\right) v_i, \quad (3.175)$$

$$Q^i = \frac{1}{c} \left(mv^i + \frac{e}{c} q^i\right), \quad (3.176)$$

и его квадрат

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2}{c^4} (\varphi^2 - q_i q^i) + \frac{2me}{c^2} \left(\pm\varphi - \frac{1}{c} v_i q^i\right). \quad (3.177)$$

Из этого выражения видно, что квадрат длины суммарного вектора массовой заряженной частицы складывается из:

- 1) квадрата длины собственного четырёхмерного импульса частицы $P_\alpha P^\alpha = m_0^2$;
- 2) квадрата длины четырёхмерного импульса $\frac{e}{c^2} A^\alpha$, сообщаемого заряженной частице электромагнитным полем, $\frac{e^2}{c^4} (\varphi^2 - q_i q^i)$;
- 3) члена $\frac{2me}{c^2} (\pm\varphi - \frac{1}{c} v_i q^i)$, характеризующего взаимодействие гравитационного “заряда” частицы m и её электрического заряда e .

Первый член m_0^2 в формуле для квадрата вектора $Q_\alpha Q^\alpha$ (3.177) сохраняется в любом случае, т.е. является инвариантом, не зависящим от выбора системы отсчёта. Наша задача состоит в том, чтобы вычислить условия, при которых сохраняется всё выражение для квадрата вектора (3.177).

Положим, что векторный потенциал частицы в электромагнитном поле имеет структуру

$$q^i = \frac{\varphi}{c} v^i. \quad (3.178)$$

Тогда* второй член в (3.177), т.е. квадрат вектора $\frac{e}{c^2} A^\alpha$, равен

$$\frac{e^2}{c^4} A_\alpha A^\alpha = \frac{e^2 \varphi^2}{c^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right). \quad (3.179)$$

Аналогичным образом, преобразовывая третий член, получаем выражение для квадрата вектора Q^α (3.177) в виде

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2 \varphi^2}{c^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{2m_0 e}{c^2} \varphi \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.180)$$

Тогда, введя обозначение для скалярного потенциала частицы в электромагнитного поля

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.181)$$

* Аналогичную задачу можно было бы решить, предположив, что $q^i = \pm \frac{e}{c} v^i$. Однако при сравнительном анализе двух групп уравнений движения интерес будет представлять только положительные значения $q^i = \frac{e}{c} v^i$, так как физическое время наблюдателя τ , по определению, течёт только из прошлого в будущее (эталонное время) и интервал наблюдаемого времени $d\tau$ всегда больше нуля.

мы можем записать полученное выражение (3.180) как

$$Q_\alpha Q^\alpha = m_0^2 + \frac{e^2 \varphi_0^2}{c^4} + \frac{2m_0 e \varphi_0}{c^2} = \text{const.} \quad (3.182)$$

Отсюда видно, что длина суммарного вектора Q^α заряженной массовой частицы сохраняется при параллельном переносе (т.е. является инвариантом, не зависящим от выбора системы отсчёта), если наблюдаемые х.и.-потенциалы φ и q^i электромагнитного поля связаны с четырёхмерным потенциалом данного электромагнитного поля A^α соотношениями

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^i = q^i = \frac{\varphi}{c} v^i. \quad (3.183)$$

Тогда для четырёхмерного вектора $\frac{e}{c^2} A^\alpha$, характеризующего взаимодействие заряженной частицы с внешним электромагнитным полем, мы имеем х.и.-проекции

$$\frac{e}{c^2} \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{e \varphi_0}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{e}{c^2} A^i = \frac{e \varphi_0}{c^3} \frac{v^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.184)$$

Заметим, что размерности векторов $\frac{e}{c^2} A^\alpha$ и $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ в системе единиц СГСЭ и гауссовой совпадают и равны размерности массы m [грамм].

Сравнивая физически наблюдаемые компоненты обоих векторов, нетрудно заметить, что аналогом релятивистской массы m во взаимодействии частицы с электромагнитным полем выступает величина

$$\frac{e \varphi}{c^2} = \frac{e \varphi_0}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (3.185)$$

где $e \varphi$ потенциальная энергия заряженной частицы, движущейся с наблюдаемой скоростью $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ в электромагнитном поле (которое покоится относительно наблюдателя и его тела отсчёта).

Вообще говоря, скалярный потенциал φ является релятивистской потенциальной энергией частицы с зарядом e , а $e \varphi$ её потенциальной энергией покоя. Когда частица покоится относительно поля, её потенциальная энергия покоя совпадает с релятивистской потенциальной энергией. Сопоставляя величины $E = mc^2$ и

$W = e\varphi$, мы можем сказать, что $\frac{W_0}{c^2}$ есть электромагнитный аналог релятивистской массы m . Соответственно, $\frac{W_0}{c^2} = \frac{e\varphi_0}{c^2}$ представляет собой электромагнитный аналог массы покоя m_0 . Тогда векторная наблюдаемая величина $\frac{e}{c^2} A^i = \frac{e\varphi}{c^2} v^i$ аналогична наблюдаемому вектору импульса массовой частицы, отнесённому к скорости света, $p^i = m v^i$. Таким образом, когда частица покоится относительно поля, её “электромагнитная” проекция на пространство (векторная величина) равна нулю и наблюдается лишь её временная проекция (потенциальная энергия покоя $e\varphi_0 = const$). Если же частица движется в поле со скоростью v^i , то её наблюдаемыми “электромагнитными” проекциями являются релятивистская потенциальная энергия $e\varphi$ и релятивистский трёхмерный импульс $\frac{e\varphi}{c^2} v^i$.

Зная х.и.-компоненты вектора $\frac{e}{c^2} A^\alpha$ (3.184), вычисленные для заданной структуры компонент вектора A^α (3.183), можно восстановить его в общековариантном виде, выразив через скалярный потенциал покоящейся заряженной частицы в электромагнитном поле. Учитывая, что компонента A^i равна

$$A^i = q^i = \frac{\varphi}{c} v^i = \frac{\varphi}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx^i}{d\tau} = \varphi_0 \frac{dx^i}{ds}, \quad (3.186)$$

получаем искомую общековариантную форму A^α

$$A^\alpha = \varphi_0 \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad \frac{e}{c^2} A^\alpha = \frac{e\varphi_0}{c^2} \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (3.187)$$

Вместе с тем, спроецировав полученное выражение A^α (3.187) на время и на пространство

$$\frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm \varphi = \pm \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad A^i = q^i = \frac{\varphi}{c} v^i, \quad (3.188)$$

мы имеем знакопеременность во временной проекции, отсутствующую в исходной временной проекции этой величины (3.183).

Естественно возникает вопрос: почему временная наблюдаемая компонента вектора A^α , определённая вначале как φ , при заданной структуре вектора A^α (3.187) приобрела знакопеременность? Здесь дело в том, что в первом случае наблюдаемые величины φ и q^i определяются исходя из общего правила образования х.и.-величин. Однако, не зная структуры самого проецируемого вектора A^α , мы не

можем их вычислить. Поэтому в выражениях для временной и пространственной проекций (3.183) символы φ и q^i лишь обозначают наблюдаемые компоненты, не раскрывая при этом их “внутренней” структуры. Вместе с тем, в выражениях (3.188) величины φ и q^i являются *вычисленными* по формулам $\varphi = \sqrt{g_{00}} A^0 + \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}} A^i$ и $q^i = A^i$, где структура компонент A^0 и A^i является заданной. Поэтому во втором случае величина $\pm\varphi$ есть результат вычисления, из которого непосредственно следует её конкретное выражение

$$\varphi = \pm \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.189)$$

Таким образом, *вычисленные* значения х.и.-компонент вектора $\frac{e}{c^2} A^\alpha$ имеют вид

$$\frac{e}{c^2} \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm \frac{e\varphi}{c^2} = \pm \frac{e\varphi_0}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \frac{e}{c^2} A^i = \frac{e\varphi}{c^3} v^i, \quad (3.190)$$

где знак “плюс” имеет место для частиц нашего мира, движущихся из прошлого в будущее (мир с прямым ходом времени), тогда как знак “минус” — для частиц зазеркалья, движущихся относительно нас в прошлое (мир с обратным ходом времени). Квадрат длины этого вектора имеет вид

$$\frac{e^2}{c^4} A_\alpha A^\alpha = \frac{e^2 \varphi^2}{c^4} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{e^2 \varphi_0^2}{c^4} = const \quad (3.191)$$

вдоль всей траектории движения частицы (линии параллельного переноса). Сам вектор $\frac{e}{c^2} A^\alpha$ имеет вещественную длину при $v^2 < c^2$, нулевую длину при $v^2 = c^2$, и мнимую при $v^2 > c^2$. Здесь мы ограничились исследованием лишь вещественной формы этого вектора, так как светоподобные и сверхсветовые частицы нам неизвестны. Если сравнить выражения для векторов $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ и $\frac{e}{c^2} A^\alpha = \frac{e\varphi_0}{c^2} \frac{dx^\alpha}{ds}$, становится очевидно, что оба эти вектора коллинеарны, так как являются касательными к одной и той же неизотропной траектории, вдоль которой выбран параметр дифференцирования ds . Следовательно, в данном случае направление динамического вектора частицы P^α совпадает с направлением действия на неё электромагнитного поля (частица движется “вдоль” поля).

Исследуем общий случай, когда эти векторы не совпадают по направлению. Из квадрата суммарного вектора $Q_\alpha Q^\alpha$ (3.177) видно, что третий член есть удвоенное скалярное произведение векторов P^α и $\frac{e}{c^2}A^\alpha$. При параллельном переносе двух векторов их скалярное произведение сохраняется

$$D(P_\alpha A^\alpha) = A^\alpha DP_\alpha + P_\alpha DA^\alpha = 0, \quad (3.192)$$

таким образом, получаем

$$\frac{2e}{c^2} P_\alpha A^\alpha = \frac{2me}{c^2} \left(\pm \varphi - \frac{1}{c} v_i q^i \right) = const, \quad (3.193)$$

т.е. скалярное произведение P^α и $\frac{e}{c^2}A^\alpha$ сохраняется. Поэтому сохраняется и длина каждого из переносимых векторов. В частности, для четырёхмерного электромагнитного потенциала мы имеем

$$A_\alpha A^\alpha = \varphi^2 - q_i q^i = const. \quad (3.194)$$

В то же время, как известно, скалярное произведение двух векторов есть произведение их длин на косинус угла между ними. Поэтому при параллельном переносе угол между переносимыми векторами также сохраняется

$$\cos(P^\alpha; A^\alpha) = \frac{P_\alpha A^\alpha}{m_0 \sqrt{\varphi^2 - q_i q^i}} = const. \quad (3.195)$$

Учитывая выражение для релятивистской массы m , мы можем записать условие (3.193) в виде

$$\frac{2e}{c^2} P_\alpha A^\alpha = \pm \frac{2m_0 e}{c^2} \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{2m_0 e}{c^2} \frac{v_i q^i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = const, \quad (3.196)$$

или, иначе, в виде связи скалярного и вектор-потенциала

$$\pm \frac{\varphi}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{v_i q^i}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = const. \quad (3.197)$$

Например, найдём связь между потенциалами φ и q^i частицы в поле, когда четырёхмерный вектор частицы P^α ортогонален четырёхмерному импульсу $\frac{e}{c^2}A^\alpha$, получаемому частицей от поля. Так

как при параллельном переносе двух векторов угол между ними сохраняется, то, согласно (3.195), косинус угла между данными ортогональными векторами равен нулю вдоль всей траектории

$$P_\alpha A^\alpha = \pm \varphi - \frac{1}{c} v_i q^i = 0. \quad (3.198)$$

Следовательно, если частица движется в электромагнитном поле таким образом, что векторы P^α и A^α ортогональны, то скалярный потенциал поля равен

$$\varphi = \pm \frac{1}{c} v_i q^i, \quad (3.199)$$

т.е. представляет собой скалярное произведение двух трёхмерных х.и.-векторов: наблюдаемой скорости частицы v^i и наблюдаемого вектор-потенциала q^i поля.

Теперь найдём выражение для квадрата суммарного вектора Q^α с учётом геометрической структуры четырёхмерного электромагнитного потенциала $A^\alpha = \varphi_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ (3.187). Если четырёхмерный вектор поля A^α сонаправлен с вектором импульса частицы P^α , то квадрат $Q_\alpha Q^\alpha$ принимает вид

$$Q_\alpha Q^\alpha = m^2 - \frac{m^2}{c^2} v_i v^i + \frac{e^2}{c^4} (\varphi^2 - q_i q^i) = m_0^2 + \frac{e^2}{c^4} \varphi_0^2. \quad (3.200)$$

Умножая обе части этого равенства на c^4 и обозначая релятивистскую энергию частицы $E = mc^2$, получаем

$$E^2 - c^2 p^2 + e^2 \varphi^2 - e^2 q_i q^i = E_0^2 + e^2 \varphi_0^2, \quad (3.201)$$

где $p^2 = p_i p^i$, $p^i = m v^i$ трёхмерный х.и.-импульс частицы, $e\varphi$ потенциальная энергия заряженной частицы в электромагнитном поле, и $e q_i$ трёхмерный импульс, приобретаемый заряженной частицей в электромагнитном поле.

3.9 Уравнения Минковского как частный случай полученных уравнений движения

Итак, в §3.6 мы получили наблюдаемые х.и.-проекции общековариантных уравнений движения массовой заряженной частицы в псевдоримановом пространстве. При этом исходные общековариантные уравнения движения были выведены методом параллель-

ного переноса суммарного вектора частицы. Там же нами было показано, что временная наблюдаемая проекция (3.147) этих уравнений движения в галилеевой системе отсчёта принимает вид временной компоненты уравнений Минковского (3.98). Соответственно, в трёхмерном евклидовом пространстве наше х.и.-скалярное уравнение (3.147) превращается в теорему живых сил классической электродинамики (3.92). Однако в правых частях (3.157) пространственных наблюдаемых проекций вместо х.и.-силы Лоренца $-e \left(E^i + \frac{1}{2c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right)$ стоит выражение $\Phi^i = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right)$, отличающееся коэффициентом $\frac{1}{2}$, а также ещё несколько дополнительных членов, являющихся функциями наблюдаемых характеристик электромагнитного поля и самого пространства. Поэтому для трёхмерных наблюдаемых проекций уравнений движения в псевдоримановом пространстве, полученных методом параллельного переноса, принцип соответствия с трёхмерными компонентами уравнений Минковского устанавливается нетривиально.

Вместе с тем, как мы уже упоминали ранее, уравнения линий неизменного направления, получающиеся в результате параллельного переноса в псевдоримановом пространстве, являются более общим случаем линий наименьшей длины, получаемых методом наименьшего действия. Причём уравнения движения, выведенные из принципа наименьшего действия (см. §3.7), по своей структуре полностью совпадают с уравнениями Минковского. Поэтому следует ожидать, что и временная и пространственная проекции наших уравнений движения заряженной частицы, как более общие, в каком-то частном случае преобразуются в пространственные проекции уравнений движения, полученных из принципа наименьшего действия.

Чтобы выяснить конкретно, при каких условиях это происходит, рассмотрим правые части пространственных проекций уравнений движения, в которых наблюдалось расхождение с силой Лоренца. Эти правые части мы (для удобства анализа) рассматривали в виде отдельных выражений и обозначили M^i (3.157). Используя х.и.-компоненту H^{ik} (3.12) тензора Максвелла, запишем член $\frac{e\varphi}{c^2} A^{ik} v_k$ исследуемого выражения (3.157) в виде

$$\frac{e\varphi}{c^2} A^{ik} v_k = \frac{e}{2c} h^{im} v^n \left(\frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} \right) - \frac{e}{2c} \varepsilon^{ikm} H_{*m} v_k, \quad (3.202)$$

где $\varepsilon^{ikm} H_{*m} = H^{ik}$. Подставим в (3.157) наблюдаемые компоненты потенциала электромагнитного поля A^α в виде (3.188), при котором вектор импульса $\frac{e}{c^2} A^\alpha$, сообщаемого заряженной частице электромагнитным полем касателен к траектории. Используя первое выражение $q_m = \frac{e}{c} v_m$, получаем зависимость исследуемой правой части только от скалярного потенциала электромагнитного поля

$$M^i = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right) + e h^{ik} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{* \partial \varphi}{\partial x^k} + \frac{e \varphi}{2} h^{ik} \frac{* \partial}{\partial x^k} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (3.203)$$

Подставляя φ (3.181) в это выражение, мы видим, что сумма двух последних членов становится равной нулю

$$- \frac{e \varphi}{2} h^{ik} \frac{* \partial}{\partial x^k} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{e \varphi}{2} h^{ik} \frac{* \partial}{\partial x^k} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = 0, \quad (3.204)$$

в результате чего формула для M^i принимает вид х.и.-силы Лоренца в псевдоримановом пространстве

$$M^i = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right), \quad (3.205)$$

что, собственно, и требовалось доказать.

Таким образом, пространственные проекции уравнений движения заряженной массовой частицы, выведенных методом параллельного переноса в псевдоримановом пространстве, совпадают с пространственными проекциями уравнений движения, полученных из принципа наименьшего действия, в частном случае, когда четырёхмерный электромагнитный потенциал имеет структуру (3.187). Соответственно, при такой структуре электромагнитного потенциала в галилеевой системе отсчёта плоского пространства-времени наши х.и.-уравнения движения полностью совпадают с уравнениями Минковского и в трёхмерном евклидовом пространстве принимают вид уравнений движения классической электродинамики.

Рассмотрим теперь правую часть $c^2 T$ скалярного уравнения (3.147) при условии, что вектор A^α имеет указанную структуру и направлен по касательной к траектории движения частицы. Подставляя в (3.146) наблюдаемые компоненты φ и q^i , вычисленные для

вектора A^α данной структуры, преобразуем величину $c^2 T$ к виду

$$\begin{aligned} c^2 T &= -e E_i v^i - e \frac{* \partial \varphi}{\partial t} + \frac{e}{c^2} \left[\frac{* \partial}{\partial t} (\varphi h_{ik} v^k) - \varphi D_{ik} q^k \right] v^i = \\ &= -e E_i v^i - e \frac{* \partial \varphi}{\partial t} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \frac{e \varphi}{c^2} D_{ik} v^i v^k + \frac{e \varphi}{c^2} v_k \frac{* \partial v^k}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Подставляя в первую производную φ (3.181) и, после дифференцирования, вновь возвращаясь к φ , получаем

$$\begin{aligned} c^2 T &= -e E_i v^i - \frac{e \varphi}{2c^2} \frac{* \partial}{\partial t} (h_{ik} v^i v^k) + \frac{e \varphi}{c^2} D_{ik} v^i v^k + \frac{e \varphi}{c^2} v_k \frac{* \partial v^k}{\partial t} = \\ &= -e E_i v^i - \frac{e \varphi}{2c^2} \left(\frac{* \partial h_{ik}}{\partial t} v^i v^k + 2 v_k \frac{* \partial v^k}{\partial t} \right) + \\ &\quad + \frac{e \varphi}{c^2} D_{ik} v^i v^k + \frac{e \varphi}{c^2} v_k \frac{* \partial v^k}{\partial t} = -e E_i v^i, \end{aligned} \quad (3.207)$$

так как $\frac{* \partial h_{ik}}{\partial t} = 2 D_{ik}$ по определению тензора деформации D_{ik} (1.40).

Таким образом, правая часть скалярного х.и.-уравнения движения заряженной частицы полностью совпадает с временной проекцией четырёхмерных уравнений Минковского в псевдоримановом пространстве. Следовательно, если четырёхмерный вектор-потенциал электромагнитного поля направлен по касательной к четырёхмерной траектории (мировой линии) заряженной частицы, то уравнения движения, выведенные методом параллельного переноса, полностью совпадают с уравнениями движения, полученными из принципа наименьшего действия. Впрочем, это ещё раз иллюстрирует тот геометрический факт, что линии наименьшей длины, получаемые из принципа наименьшего действия, являются лишь частным случаем линий неизменного направления, являющихся результатом параллельного переноса.

3.10 Структура псевдориманова пространства со стационарным электромагнитным полем

Очевидно, что задание определённой структуры электромагнитного поля накладывает определённые ограничения на движение заряженных частиц, что, в свою очередь, накладывает ограничения на структуру псевдориманова пространства, в котором это движе-

ние происходит. Давайте исследуем, какова должна быть структура псевдориманова пространства, чтобы частица двигалась в стационарном электромагнитном поле.

Хронометрически инвариантные уравнения движения заряженной массовой частицы нашего мира имеют вид

$$\frac{dE}{d\tau} - m F_i v^i + m D_{ik} v^i v^k = -e \frac{d\varphi}{d\tau} + \frac{e}{c} (F_i q^i - D_{ik} q^i v^k), \quad (3.208)$$

$$\begin{aligned} \frac{d(mv^i)}{d\tau} - m F^i + 2m (D_k^i + A_{k.}^i) v^k + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -\frac{e}{c} \frac{dq^i}{d\tau} - \frac{e}{c} \left(\frac{\varphi}{c} v^k + q^k \right) (D_k^i + A_{k.}^i) + \frac{e\varphi}{c^2} F^i - \frac{e}{c} \Delta_{nk}^i q^n v^k. \end{aligned} \quad (3.209)$$

Так как мы считаем электромагнитное поле стационарным, потенциалы поля φ и q^i являются функциям лишь пространственных координат, но не времени. Таким образом, наблюдаемые компоненты тензора электромагнитного поля (тензора Максвелла) для стационарного поля принимают упрощённый вид

$$E_i = \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\varphi}{c^2} F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \varphi \frac{\partial}{\partial x^i} \ln \left(1 - \frac{w}{c^2} \right), \quad (3.210)$$

$$H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn} \right). \quad (3.211)$$

Отсюда можно получить ограничения на метрику пространства, налагаемые требованием стационарности электромагнитного поля. В выражении для E_i и H^{*i} , наряду с х.и.-производными от скалярного и векторного потенциалов поля, входят х.и.-характеристики пространства отсчёта — вектор гравитационно-инерциальной силы F_i и тензор неголономности (вращения) пространства A_{ik} .

Очевидно, что в стационарном электромагнитном поле отсчёта физически наблюдаемые характеристики пространства также должны быть стационарными

$$\frac{* \partial F_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{* \partial F^i}{\partial t} = 0, \quad \frac{* \partial A_{ik}}{\partial t} = 0, \quad \frac{* \partial A^{ik}}{\partial t} = 0. \quad (3.212)$$

Из этих определений видно: величины F_i и A_{ik} не зависят от времени, если линейная скорость вращения пространства стационарна, т.е. $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$ (стационарное вращение пространства). В таком случае

х.и.-производная по пространственным координатам превращается в обычную производную

$$\frac{*\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{c^2} \frac{*\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (3.213)$$

Так как х.и.-производная по времени $\frac{\partial}{\partial t} = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \frac{*\partial}{\partial t}$ отличается от обычной производной лишь множителем, то для стационарной величины обычная производная также равна нулю. Для тензора скоростей деформации D_{ik} в случае стационарного вращения пространства имеем

$$\frac{*\partial D_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{*\partial h_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{*\partial}{\partial t} \left(-g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k \right) = -\frac{1}{2} \frac{*\partial g_{ik}}{\partial t}. \quad (3.214)$$

В силу стационарности правых частей уравнения движения левые части также должны быть стационарными. Это, в свою очередь, означает, что пространство не деформируется. Тогда, согласно (3.214), трёхмерная координатная метрика g_{ik} не зависит от времени и х.и.-символы Кристоффеля Δ_{jk}^i (1.47) также стационарны. Хронометрически инвариантные компоненты тензора Максвелла (3.210, 3.211) подчиняются уравнениям Максвелла (3.63, 3.64), которые для стационарного поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E^i}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} E^i - \frac{2}{c} \Omega_{*m} H^{*m} &= 4\pi\rho \\ \varepsilon^{ikm} * \widetilde{\nabla}_k (H_{*m} \sqrt{h}) &= \frac{4\pi}{c} j^i \sqrt{h} \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (3.215)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} H^{*i} + \frac{2}{c} \Omega_{*m} E^m &= 0 \\ \varepsilon^{ikm} * \widetilde{\nabla}_k (E_m \sqrt{h}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II}. \quad (3.216)$$

Тогда условие Лоренца (3.65) и уравнение неразрывности (3.66), соответственно, имеют вид

$$*\widetilde{\nabla}_i q^i = 0, \quad *\widetilde{\nabla}_i j^i = 0. \quad (3.217)$$

Итак, мы вычислили, как стационарность электромагнитного поля влияет на физически наблюдаемые характеристики псевдориманова пространства и на основные уравнения электродинамики.

В следующих параграфах, пользуясь этими результатами, мы получим решения уравнений движения для заряженной частицы в псевдоримановом пространстве (3.208, 3.209) для трёх конкретных случаев стационарных полей: 1) в стационарном электрическом поле (магнитная составляющая поля равна нулю); 2) в стационарном магнитном поле (электрическая составляющая поля равна нулю); 3) в стационарном электрическом и магнитном полях.

3.11 Движение заряженной частицы в стационарном электрическом поле

Рассмотрим движение заряженной массовой частицы в стационарном электрическом поле в псевдоримановом пространстве. Магнитное поле в данном случае отсутствует, т.е. не проявляется для наблюдателя. Каким условиям должно удовлетворять псевдориманово пространство, допускающее существование стационарного электромагнитного поля чисто “электрического” типа? Из выражения для магнитной напряжённости стационарного поля

$$H_{ik} = \frac{\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{\partial q_k}{\partial x^i} - \frac{2\varphi}{c} A_{ik} \quad (3.218)$$

следует, что $H_{ik} = 0$, если выполняются два условия:

- 1) вектор-потенциал q^i является безвихревым $\frac{\partial q_i}{\partial x^k} = \frac{\partial q_k}{\partial x^i}$;
- 2) пространство является голономным, т.е. $A_{ik} = 0$.

Напряжённость стационарного электрического поля E_i (3.210) есть сумма пространственной производной от скалярного потенциала φ и члена $\frac{\varphi}{c^2} F_i$, характеризующего взаимодействие поля потенциала с полем гравитационно-инерциальной силы. Но на поверхности Земли отношение гравитационного потенциала к квадрату скорости света

$$\frac{w}{c^2} = \frac{GM_{\oplus}}{c^2 R_{\oplus}} \approx 10^{-10}, \quad (3.219)$$

поэтому второй член в выражении для E_i (3.210) можно считать в условиях реальной земной лаборатории пренебрежимо малым, и величина E_i определяется лишь пространственным распределением скалярного потенциала поля

$$E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}. \quad (3.220)$$

Из-за стационарности правых частей уравнения движения, представляющих собой силу Лоренца, левые части также должны быть стационарными. При рассматриваемых нами условиях это выполняется, если тензор скоростей деформации равен нулю, т.е. пространство не деформируется.

Таким образом, если стационарное электромагнитное поле имеет такую структуру, что отлична от нуля лишь его электрическая составляющая, а магнитная составляющая отсутствует, то псевдориманово пространство должно удовлетворять трём следующим условиям:

- 1) гравитационный потенциал w пренебрежимо мал $w \approx 0$;
- 2) пространство не вращается, т.е. $A_{ik} = 0$;
- 3) пространство не деформируется, т.е. $D_{ik} = 0$.

Кроме того, для простоты вычислений будем считать, что в условиях измерений трёхмерное пространство по структуре приближается к евклидову пространству, т.е. $\Delta_{nk}^i \approx 0$.

Тогда х.и.-уравнения движения массовой заряженной частицы нашего мира (3.208, 3.209) принимают следующий вид

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{e}{c^2} \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad (3.221)$$

$$\frac{d}{d\tau}(mv^i) = -\frac{e}{c} \frac{dq^i}{d\tau}. \quad (3.222)$$

Из скалярного уравнения движения (теоремы живых сил) видно: изменение релятивистской энергии частицы $E = mc^2$ обусловлено работой электрической составляющей поля E_i .

Из векторного уравнения движения следует, что изменение трёхмерного наблюдаемого импульса частицы происходит под действием члена q^i . Полагая, что четырёхмерный потенциал поля направлен по касательной к мировой линии частицы, мы, как было показано в §3.9, получим в правой части векторного уравнения трёхмерную силу Лоренца для электрического поля

$$\Phi^i = -eE^i. \quad (3.223)$$

То есть, в рассматриваемом нами случае изменение трёхмерного импульса частицы происходит также из-за действия на неё напряжённости электрического поля. Обе группы уравнений Максвелла

для стационарного поля (3.215, 3.216) в этом случае приобретает простую форму

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial E^i}{\partial x^i} = 4\pi\rho \\ j^i = 0 \end{array} \right\} \text{I,} \quad \left. \varepsilon^{ikm} \frac{\partial E_m}{\partial x^k} = 0 \right\} \text{II.} \quad (3.224)$$

Интегрируя скалярное уравнение движения, т.е. *теорему живых сил*, получаем так называемый *интеграл живых сил*

$$m + \frac{e\varphi}{c^2} = B = \text{const}, \quad (3.225)$$

где B постоянная интегрирования.

Кроме того, из уравнений Максвелла следует, что в данном случае скалярный потенциал поля удовлетворяет:

- 1) уравнению Пуассона $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 4\pi\rho$, если плотность зарядов $\rho \neq 0$;
- 2) уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$, если плотность зарядов $\rho = 0$.

Итак, мы вывели, каким должно быть псевдориманово пространство, допускающее движение заряженной частицы в постоянном электромагнитном поле. Теперь естественным было бы получить точные решения уравнений частицы для какого-либо конкретного случая. Но, пока не задана конкретная структура самого поля (уравнениями Максвелла), этого сделать нельзя. Поэтому для простоты вычислений будем считать, что электрическое поле является однородным. Пусть ковариантный вектор напряжённости электрического поля E_i , являющийся хронометрическим инвариантом, направлен вдоль оси x . Так же, как Ландау и Лифшиц (см. §20 *Теории поля*), мы рассмотрим случай *отталкивания* заряженной частицы полем, т.е. когда напряжённость электрического поля имеет отрицательное численное значение, а координата частицы x возрастает (естественно, в случае *притяжения* частицы полем напряжённость является положительной, а координата частицы убывает). Тогда компоненты вектора напряжённости E_i равны

$$E_1 = E_x = -E = \text{const}, \quad E_2 = E_3 = 0. \quad (3.226)$$

Следовательно, так как однородность электрического поля означает $E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \text{const}$, то скалярный потенциал φ является функцией от x , удовлетворяющей уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial E}{\partial x} = 0. \quad (3.227)$$

Это означает, что однородное постоянное электрическое поле соответствует условию отсутствия зарядов $\rho = 0$.

Пусть частица движется сонаправлено с вектором напряжённости электрического поля E_i , т.е. вдоль оси x . Тогда уравнения её движения примут следующий вид

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{e}{c^2} \frac{d\varphi}{d\tau} = -\frac{e}{c^2} \frac{d\varphi}{dx^i} v^i = \frac{e}{c^2} E \frac{dx}{d\tau}, \quad (3.228)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left(m \frac{dx}{d\tau} \right) = eE, \quad \frac{d}{d\tau} \left(m \frac{dy}{d\tau} \right) = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \left(m \frac{dz}{d\tau} \right) = 0. \quad (3.229)$$

Интегрируя скалярное уравнение движения (теорему живых сил), получаем интеграл живых сил

$$m = \frac{eE}{c^2} x + B, \quad B = \text{const}, \quad (3.230)$$

где постоянную B мы получаем из начальных условий интегрирования $m|_{\tau=0} = m_{(0)}$ и $x|_{\tau=0} = x_{(0)}$

$$B = m_{(0)} - \frac{eE}{c^2} x_{(0)}, \quad (3.231)$$

тогда решение (3.230) принимает вид

$$m = \frac{eE}{c^2} (x - x_{(0)}) + m_{(0)}. \quad (3.232)$$

Подставляя полученный интеграл живых сил в векторные уравнения движения (3.229), приводим их к виду (точка обозначает дифференцирование по физическому наблюдаемому времени τ)

$$\left. \begin{aligned} \frac{eE}{c^2} \dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{x} &= eE \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{y} &= 0 \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.233)$$

Второе и третье уравнения представляют собой уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{\ddot{y}}{y} = \frac{-\frac{eE}{c^2} \dot{x}}{B + \frac{eE}{c^2} x}, \quad \frac{\ddot{z}}{z} = \frac{-\frac{eE}{c^2} \dot{x}}{B + \frac{eE}{c^2} x}, \quad (3.234)$$

которые легко интегрируются. Их решения являются простыми и имеют следующий вид, соответственно,

$$\dot{y} = \frac{C_1}{B + \frac{eE}{c^2} x}, \quad \dot{z} = \frac{C_2}{B + \frac{eE}{c^2} x}, \quad (3.235)$$

где C_1 и C_2 константы интегрирования, которые находим, задав начальные условия $\dot{y}|_{\tau=0} = \dot{y}_{(0)}$ и $\dot{z}|_{\tau=0} = \dot{z}_{(0)}$ и используя выражение для B (3.121). В результате мы имеем

$$C_1 = m_{(0)} \dot{y}_{(0)}, \quad C_2 = m_{(0)} \dot{z}_{(0)}. \quad (3.236)$$

Теперь решим уравнения движения вдоль оси x , т.е. первое уравнение из системы (3.233). Для этого сделаем в нем замену переменных $\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = p$. Тогда мы имеем

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dt} = pp', \quad (3.237)$$

и указанное уравнение движения вдоль оси x принимает вид уравнения с разделяющимися переменными

$$\frac{p dp}{1 - \frac{p^2}{c^2}} = \frac{eE dx}{B + \frac{eE}{c^2} x}, \quad (3.238)$$

представляющее собой табличный интеграл. После интегрирования получаем его решение

$$\sqrt{1 - \frac{p^2}{c^2}} = \frac{C_3}{B + \frac{eE}{c^2} x}, \quad C_3 = const. \quad (3.239)$$

Полагая $p = \dot{x}|_{\tau=0} = \dot{x}_{(0)}$ и подставляя постоянную B из интеграла живых сил (3.231), находим постоянную интегрирования

$$C_3 = m_{(0)} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}. \quad (3.240)$$

В рассматриваемом случае можно произвести замену интервала физического наблюдаемого времени dt на интервал координатного времени $d\tau$. Мы сейчас объясним, почему.

В *Теории поля* Ландау и Лифшиц решали уравнения движения заряженной частицы в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского. Естественно, чтобы как-то сопоставить наши решения с их результатами, мы должны рассмотреть такой же, как и у них, частный случай — движение в стационарном и однородном поле (см. §20 *Теории поля*).

В этом частном случае, как мы показали в начале параграфа методами математического аппарата хронометрических инвариантов, $F_i = 0$ и $A_{ik} = 0$, следовательно

$$d\tau = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2} v_i dx^i = dt, \quad (3.241)$$

т.е. в рассматриваемой четырёхмерной области, где движется частица, метрика является галилеевой.

Итак, подставляя $p = \frac{dx}{dt}$ в выражение (3.239), получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{\sqrt{\left(B + \frac{eE}{c^2} x\right)^2 - C_3^2}}{B + \frac{eE}{c^2} x}, \quad (3.242)$$

решение которого есть

$$ct = \frac{c^2}{eE} \sqrt{\left(B + \frac{eE}{c^2} x\right)^2 - C_3^2} + C_4, \quad C_4 = const, \quad (3.243)$$

где константа интегрирования C_4 , с учётом начальных условий в момент времени $t = 0$, составляет

$$C_4 = -\frac{m_{(0)}c}{eE} \dot{x}_{(0)}. \quad (3.244)$$

Теперь, выразив в явном виде координату x из (3.243) через t , мы получаем окончательное решения уравнений движения заряженной массовой частицы вдоль оси x

$$x = \frac{c^2}{eE} \left[\sqrt{\frac{e^2 E^2}{c^4} (ct - C_4)^2 + C_3^2} - B \right], \quad (3.245)$$

или, после подстановки значений констант интегрирования,

$$x = \sqrt{\left(ct + \frac{m_{(0)}c\dot{x}_{(0)}}{eE}\right)^2 + \left(\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\right)^2 \left(1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}\right)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE} + x_{(0)}. \quad (3.246)$$

Естественно, если рассматривать поле, притягивающее заряженную частицу, т.е. когда электрическая напряжённость принимает положительное значение $E_1 = E_x = E = const$), в качестве решения уравнений движения мы получим такое же выражение для координаты x , но с обратным знаком:

$$x = \frac{c^2}{eE} \left[B - \sqrt{\frac{e^2 E^2}{c^4} (ct - C_4)^2 + C_3^2} \right]. \quad (3.247)$$

В §20 *Теории поля* рассматривается аналогичная задача, однако Ландау и Лифшиц решают её путём интегрирования трёхмерных компонент общековариантных уравнений движения заряженной частицы (трёхмерных уравнений Минковского) без учёта теоремы живых сил. В итоге их выражение для координаты x имеет вид

$$x = \frac{1}{eE} \sqrt{(m_0 c^2)^2 + (ceEt)^2}. \quad (3.248)$$

Это полностью совпадает с нашим решением (3.245) в том случае, если положить начальную скорость частицы равной нулю $\dot{x}_{(0)} = 0$ и потребовать, чтобы выполнялось следующее соотношение $x_{(0)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE} = 0$. Последнее соответствует существенному упрощению, принятому в *Теории поля*, согласно которому константы интегрирования полагаются равными нулю.

Как видите, даже при решении уравнений движения в галилеевой системе отсчёта плоского пространства Минковского метод хронометрических инвариантов даёт преимущества, сразу выявляя влияние скрытых факторов, незаметных при решении обычных трёхмерных компонент общековариантных уравнений движения. Это означает, что даже тогда, когда физически наблюдаемые величины совпадают с координатными величинами, геометрически правильным является решение *системы* из физических наблюдаемых х.и.-уравнений движения, так как теорема живых сил как скалярное

уравнение движения неизбежно влияет на решение трёхмерных векторных уравнений движения. Разумеется, при неоднородном нестационарном электрическом поле в нашем решении появляются дополнительные члены, вызванные влиянием более сложной, меняющейся со временем структуры поля.

Теперь вычислим трёхмерную траекторию частицы в стационарном однородном электрическом поле. Для этого проинтегрируем уравнение движения вдоль осей y и z (3.235), выразим отсюда время и подставим в полученное нами решение для x .

Вначале, подставляя в уравнение для \dot{y} полученное решение для x (3.245), мы получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dt} = \frac{C_1}{\sqrt{\frac{e^2 E^2}{c^4} (ct - C_4)^2 + C_3^2}}, \quad (3.249)$$

интегрируя которое, имеем

$$y = \frac{m_{(0)} \dot{y}_{(0)} c}{eE} \operatorname{arc} \sinh \frac{eEt + m_{(0)} \dot{x}_{(0)}}{m_{(0)} c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} + C_5, \quad (3.250)$$

где C_5 новая постоянная интегрирования. Из начальных условий $y = y_{(0)}$ и $t = 0$ при находим

$$C_5 = y_{(0)} - \frac{m_{(0)} \dot{y}_{(0)} c}{eE} \operatorname{arc} \sinh \frac{\dot{x}_{(0)}}{c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}}. \quad (3.251)$$

Подставляя полученную константу в исходное выражение для y (3.250), окончательно получаем

$$y = y_{(0)} + \frac{m_{(0)} \dot{y}_{(0)} c}{eE} \times \left\{ \operatorname{arc} \sinh \frac{eEt + m_{(0)} \dot{x}_{(0)}}{m_{(0)} c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} - \operatorname{arc} \sinh \frac{\dot{x}_{(0)}}{c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} \right\}. \quad (3.252)$$

Теперь выразим отсюда t через y и $y_{(0)}$. Далее, учитывая, что $a = \operatorname{arc} \sinh b$ при $b = \sinh a$, мы делаем во втором члене этого выра-

жения замену $\operatorname{arc} \sinh b = \ln(b + \sqrt{b^2 + 1})$. В результате, получаем

$$t = \frac{1}{eE} \left\{ m_{(0)} c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}} \times \right. \\ \left. \times \sinh \left[\frac{y - y_{(0)}}{m_{(0)} \dot{y}_{(0)} c} eE + \ln \frac{\dot{x}_{(0)} + c}{c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} - m_{(0)} \dot{x}_{(0)} \right] \right\}. \quad (3.253)$$

Теперь подставим это выражение в полученное нами решение для x (3.246). В результате получаем искомое уравнение для трёхмерной траектории частицы

$$x = x_{(0)} + \frac{m_{(0)} c^2}{eE} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}} \times \\ \times \cosh \left\{ \frac{y - y_{(0)}}{m_{(0)} \dot{y}_{(0)} c} eE + \ln \frac{\dot{x}_{(0)} + c}{c \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} - \frac{m_{(0)} c^2}{eE} \right\}. \quad (3.254)$$

Полученное выражение означает, что заряженная массовая частица нашего мира движется в однородном стационарном электрическом поле по кривой, в основе которой лежит *цепная линия*, а отклоняющие её от “чистой” цепной линии факторы являются функциями начальных условий. Наше выражение для траектории частицы (3.254) полностью совпадает с результатом *Теории поля*

$$x = \frac{m_{(0)} c^2}{eE} \cosh \frac{eE y}{m_{(0)} \dot{y}_{(0)} c} \quad (3.255)$$

(формула 20.5 в §20 [10]), если предположить, что начальная скорость частицы $x_{(0)} - \frac{m_{(0)} c^2}{eE} = 0$, а также $\dot{x}_{(0)} = 0$, причём последнее означает предположение о равенстве нулю постоянной интегрирования скалярного уравнения движения (теоремы живых сил), что, вообще говоря, является серьёзным допущением. При малых скоростях, приравняв к нулю релятивистские соотношения и разложив гиперболический косинус в ряд $\cosh b = 1 + \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} + \frac{b^6}{6!} + \dots$, наше

выражение для трёхмерной траектории частицы (3.254), с точностью до членов второго порядка малости, принимает вид

$$x = x_{(0)} + \frac{eE(y - y_{(0)})^2}{2m_{(0)}\dot{y}_{(0)}^2}, \quad (3.256)$$

т.е. частица движется по *параболе*. Этот вывод, если положить начальные координаты равными нулю, также соответствует результату из *Теории поля*

$$x = \frac{eEy^2}{2m_{(0)}\dot{y}_{(0)}^2}. \quad (3.257)$$

При интегрировании уравнения движения вдоль оси z получают точно такие же результаты. Происходит это потому, что уравнения относительно \dot{y} и \dot{z} (3.235) различаются всего лишь постоянным множителем — константой интегрирования (3.236), равной начальному импульсу частицы вдоль оси y (в уравнении для \dot{y}) и вдоль оси z (в уравнении для \dot{z}).

Переходя от кинематики к динамике движения частиц, найдём динамические характеристики движения заряженной частицы в стационарном однородном электрическом поле — её релятивистскую энергию и импульс. Вычислив релятивистский корень (при используемых нами допущениях)

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} = \frac{m_{(0)} \sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2 + \dot{y}_{(0)}^2 + \dot{z}_{(0)}^2}{c^2}}}{m_{(0)} + \frac{eE}{c^2}(x - x_{(0)})}, \quad (3.258)$$

получаем энергию частицы

$$E = \frac{m_{(0)}c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_{(0)}c^2 + eE(x - x_{(0)})}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}_{(0)}^2 + \dot{y}_{(0)}^2 + \dot{z}_{(0)}^2}{c^2}}}, \quad (3.259)$$

которая при скорости частицы, много меньшей скорости света принимает вид

$$E = m_{(0)}c^2 + eE(x - x_{(0)}). \quad (3.260)$$

Соответствующим образом вычисляется и релятивистский импульс частицы, однако, из-за громоздкости получившегося выражения, мы его не приводим.

Теперь рассмотрим движение массовой заряженной частицы зазеркалья при аналогичных условиях, т.е. в стационарном однородном электрическом поле. Х.и.-уравнения её движения, с учётом принятых в этом параграфе ограничений на геометрическую структуру пространства, имеют следующий вид

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{e}{c^2} \frac{d\varphi}{d\tau}, \quad (3.261)$$

$$\frac{d}{d\tau}(mv^i) = -\frac{e}{c} \frac{dq^i}{d\tau}, \quad (3.262)$$

т.е. отличаются от уравнений движения аналогичной частицы в нашем мире (3.221, 3.222) лишь знаком в теореме живых сил.

Положим, что электрическая напряжённость отрицательна (*отталкивание* частицы полем), а частица движется сонаправлено с вектором напряжённости поля вдоль оси x . Тогда, интегрируя теорему живых сил для частицы зазеркалья (3.261), получаем

$$m = -\frac{eE}{c^2} x + B, \quad (3.263)$$

где постоянная B , вычисляемая из начальных условий, равна

$$B = m_{(0)} + \frac{eE}{c^2} x_{(0)}. \quad (3.264)$$

Подставляя это значение m в векторные уравнения движения (3.262), записанные покомпонентно, имеем (сравн. с форм. 3.233)

$$\left. \begin{aligned} -\frac{eE}{c^2} \dot{x}^2 + \left(B - \frac{eE}{c^2} x\right) \ddot{x} &= eE \\ -\frac{eE}{c^2} \dot{x}\dot{y} + \left(B - \frac{eE}{c^2} x\right) \ddot{y} &= 0 \\ -\frac{eE}{c^2} \dot{x}\dot{z} + \left(B - \frac{eE}{c^2} x\right) \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.265)$$

После вычислений, аналогичных действиям по нахождению траектории заряженной частицы нашего мира, получаем

$$x = \frac{c^2}{eE} \left[B - \sqrt{C_3^2 - \frac{e^2 E^2}{c^4} (ct - C_4)^2} \right], \quad (3.266)$$

где $C_3 = m_{(0)} \sqrt{1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}$ и $C_4 = -\frac{cm_{(0)}\dot{x}_{(0)}}{eE}$ представляют собой постоянные интегрирования, вычисленные из начальных условий интегрирования. С учётом вычисленных постоянных интегрирования C_3 и C_4 , мы получаем

$$x = -\sqrt{\left(\frac{m_{(0)}c^2}{eE}\right)^2 \left(1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}\right) - \left(ct + \frac{m_{(0)}c\dot{x}_{(0)}}{eE}\right)^2} + \frac{m_{(0)}c^2}{eE} + x_{(0)}. \quad (3.267)$$

Полученное здесь выражение для координаты x заряженной частицы зазеркалья, *отталкиваемой* полем, аналогично решению для частицы нашего мира в случае её *притяжения* таким же полем $E_1 = E_x = E = const$ (3.247).

Таким образом, получается очень интересный вывод: переход заряженной частицы из нашего мира в зазеркалье (мир с обратным ходом времени) равносильен смене знака её заряда.

Здесь следует отметить, что в нашем предыдущем исследовании [19] мы пришли к аналогичному выводу и в отношении масс частиц: гипотетический переход частицы из нашего мира в зазеркалье равносильен смене знака её массы. Таким образом, частицы нашего мира и частицы зазеркалья являются сопряжёнными не только по массе, но и зарядово сопряжёнными.

Теперь вычислим трёхмерную траекторию заряженной массовой частицы зазеркалья в стационарном однородном электрическом поле.

Вычисляя координату y точно таким же образом, как и для заряженной частицы нашего мира, мы получаем

$$y = y_{(0)} + \frac{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}{eE} \times \left\{ \arcsin \frac{eEt + m_{(0)}\dot{x}_{(0)}}{m_{(0)}c \sqrt{1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} - \arcsin \frac{\dot{x}_{(0)}}{c \sqrt{1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} \right\}, \quad (3.268)$$

где, по сравнению с выражением для частицы нашего мира (3.252), стоит обычный \arcsin и в корне — знак “плюс”.

Выражая отсюда время t через координаты y и $y_{(0)}$

$$t = \frac{1}{eE} \left\{ m_{(0)}c \sqrt{1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}} \times \right. \\ \left. \times \sin \left[\frac{y - y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c} eE + \ln \frac{\dot{x}_{(0)} + c}{c \sqrt{1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} \right] - m_{(0)}\dot{x}_{(0)} \right\}, \quad (3.269)$$

и подставляя в наше выражение для x (3.267), получаем уравнение трёхмерной траектории заряженной массовой частицы зазеркалья, движущейся в однородном стационарном электрическом поле,

$$x = x_{(0)} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE} \sqrt{1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}} \times \\ \times \cos \left\{ \frac{y - y_{(0)}}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c} eE + \arcsin \frac{\dot{x}_{(0)}}{c \sqrt{1 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{c^2}}} \right\} - \frac{m_{(0)}c^2}{eE}, \quad (3.270)$$

т.е. движение частицы представляет собой *гармоническое колебание*. Если предположить начальные координаты частицы равными нулю, а также её начальную скорость $\dot{x}_{(0)} = 0$ и константу интегрирования теоремы живых сил $B = 0$, то полученное уравнение траектории примет упрощённый вид

$$x = -\frac{m_{(0)}c^2}{eE} \cos \frac{eEy}{m_{(0)}\dot{y}_{(0)}c}. \quad (3.271)$$

При малой скорости движения частицы мы можем приравнять все релятивистские соотношения к нулю. Тогда, разложив косинус в ряд $\cos b = 1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - \dots \approx 1 - \frac{b^2}{2!}$ (что всегда можно сделать на малом участке траектории), наше выражение для трёхмерной траектории частицы зазеркалья (3.270) принимает вид

$$x = x_{(0)} + \frac{eE(y - y_{(0)})^2}{2m_{(0)}\dot{y}_{(0)}^2}, \quad (3.272)$$

т.е. уравнение *параболы*. Это означает, что заряженная частица зазеркаля на малой скорости, как и частица нашего мира движется по параболе. Таким образом, релятивистская заряженная частица нашего мира движется в однородном стационарном электрическом поле по цепной линии, при малых скоростях переходящей в параболу. Релятивистская заряженная частица зазеркаля движется по гармонической траектории, на малых участках которой, при малой скорости, её движение (как и частицы нашего мира) происходит по параболе. При этом для заряженной частицы зазеркаля не существует светового барьера, так как уравнение её траектории содержит релятивистский корень со знаком “плюс”, а не “минус”.

3.12 Движение заряженной частицы в стационарном магнитном поле

Рассмотрим движение заряженной частицы в случае, когда электрическая составляющая поля отсутствует, а присутствует лишь стационарное магнитное поле. Тогда

$$E_i = \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\varphi}{c^2} F_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \frac{\varphi}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial w}{\partial x^i} = 0, \quad (3.273)$$

$$H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \left(\frac{\partial q_m}{\partial x^n} - \frac{\partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn} \right) \neq 0, \quad (3.274)$$

так как в “чисто” магнитном поле ($\varphi = const$ и $E_i = 0$), т.е. гравитационным воздействием можно пренебречь. Из второго выражения видно, что магнитная напряжённость H^{*i} отлична от нуля, если выполняется хотя бы одно из условий:

- 1) поле потенциала q^i является вихревым, что иначе означает $\frac{\partial q_i}{\partial x^k} - \frac{\partial q_k}{\partial x^i} \neq 0$;
- 2) пространство является неголономным, т.е. $A_{ik} \neq 0$.

Мы будем рассматривать движение частицы для общего случая, когда имеют место оба условия, так как неголономное пространство будет нами использовано в главе 4 как базовое пространство для частицы обладающей спином (внутренним механическим моментом). Как и в предыдущем параграфе, будем полагать деформацию пространства равной нулю, а трёхмерную метрику евклидовой $g_{ik} = \delta_{ik}$. Однако наблюдаемая метрика $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ в данном случае

негалилеева, так как в неголономном пространстве, совершенно очевидно, $h_{ik} \neq -g_{ik}$ по причине $v_i \neq 0$.

Пусть пространство отсчёта вращается относительно оси z с постоянной угловой скоростью $\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \Omega$. Тогда линейная скорость вращения пространства $v_i = \Omega_{ik} x^k$ имеет две не равные нулю компоненты $v_1 = \Omega y$ и $v_2 = -\Omega x$, а у тензора неголономности отличны от нуля лишь компоненты $A_{12} = -A_{21} = -\Omega$. В этом случае метрика принимает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\Omega y dt dx + 2\Omega x dt dy - dx^2 - dy^2 - dz^2. \quad (3.275)$$

В пространстве с такой метрикой $F_i = 0$ и $D_{ik} = 0$. В дальнейшем мы будем пользоваться этой метрикой при исследовании движения заряженной частицы в стационарных полях.

В предыдущем параграфе, посвящённом движению в стационарном электрическом поле, мы дополнительно полагали символы Кристоффеля равными нулю, т.е. рассматривали движение частицы в галилеевой системе отсчёта (пространство Минковского). Однако, в этом параграфе трёхмерная наблюдаемая метрика h_{ik} не является евклидовой из-за наличия собственного вращения пространства. Поэтому х.и.-символы Кристоффеля (1.47) не равны нулю и должны быть учтены в уравнениях.

Если линейная скорость вращения пространства не является пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света, то компоненты наблюдаемого метрического тензора h_{ik} равны

$$h_{11} = 1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}, \quad h_{22} = 1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}, \quad h_{12} = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2}, \quad h_{33} = 1, \quad (3.276)$$

тогда определитель этого тензора и ненулевые компоненты обратной матрицы h^{ik} принимают следующий вид

$$h = \det \|h_{ik}\| = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = 1 + \frac{\Omega^2(x^2 + y^2)}{c^2}, \quad (3.277)$$

$$\left. \begin{aligned} h^{11} &= \frac{1}{h} \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2} \right), & h^{22} &= \frac{1}{h} \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2} \right) \\ h^{12} &= \frac{\Omega^2 xy}{hc^2}, & h^{33} &= 1 \end{aligned} \right\}. \quad (3.278)$$

Соответственно, не равные нулю компоненты х.и.-символов Кристоффеля Δ_{jk}^i (1.47) равны

$$\Delta_{11}^1 = -\frac{2\Omega^4 xy^2}{c^4 \left[1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2} \right]}, \quad (3.279)$$

$$\Delta_{12}^1 = \frac{\Omega^2 y \left(1 + \frac{2\Omega^2 x^2}{c^2} \right)}{c^2 \left[1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2} \right]}, \quad (3.280)$$

$$\Delta_{22}^1 = -\frac{2\Omega^2 x}{c^2} \frac{1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}}{1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}}, \quad (3.281)$$

$$\Delta_{11}^2 = -\frac{2\Omega^2 y}{c^2} \frac{1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}}{1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2}}, \quad (3.282)$$

$$\Delta_{12}^2 = \frac{\Omega^2 x \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2} \right)}{c^2 \left[1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2} \right]}, \quad (3.283)$$

$$\Delta_{22}^2 = -\frac{2\Omega^4 x^2 y}{c^4 \left[1 + \frac{\Omega^2(x^2+y^2)}{c^2} \right]}. \quad (3.284)$$

Теперь приступим к решению уравнений движения в стационарном магнитном поле. Для упрощения вычислений положим, что четырёхмерный потенциал поля A^α направлен по касательной к четырёхмерной траектории частицы. Так как электрическая составляющая поля отсутствует, правая часть скалярного уравнения движения равна нулю. Таким образом, х.и.-уравнения движения массовой заряженной частицы нашего мира (3.208, 3.209) в стационарном магнитном поле принимают вид

$$\frac{dm}{d\tau} = 0, \quad (3.285)$$

$$\frac{d}{d\tau}(mv^i) + 2mA_k^i v^k + m\Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{e}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}. \quad (3.286)$$

Для массовой заряженной частицы зазеркалья, движущейся в стационарном магнитном поле, уравнения движения таковы

$$-\frac{dm}{d\tau} = 0, \quad (3.287)$$

$$\frac{d}{d\tau}(m v^i) + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{e}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}. \quad (3.288)$$

После интегрирования теоремы живых сил для частицы нашего мира и частицы зазеркалья, соответственно, получаем

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = const = B, \quad -m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = const = \widetilde{B}, \quad (3.289)$$

где B и \widetilde{B} постоянные интегрирования. Это означает, что $v^2 = const$, т.е. модуль наблюдаемой скорости частицы остаётся постоянным в отсутствии электрической составляющей поля.

Тогда векторные уравнения движения для частицы нашего мира (3.286) можно записать следующим образом

$$\frac{dv^i}{d\tau} + 2A_k^i v^k + \Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{e}{mc} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}. \quad (3.290)$$

Соответственно, векторные уравнения движения частицы зазеркалья (3.288) принимают вид

$$\frac{dv^i}{d\tau} + \Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{e}{mc} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}. \quad (3.291)$$

Напряжённость магнитного поля в этих уравнениях определяется из уравнений Максвелла для стационарного электромагнитного поля (3.215, 3.216), которые, в отсутствие электрической напряжённости и при используемых в этом параграфе ограничениях, принимают следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{*m} H^{*m} &= -2\pi c \rho \\ \varepsilon^{ikm} * \nabla_k (H_{*m} \sqrt{h}) &= \frac{4\pi}{c} j^i \sqrt{h} \end{aligned} \right\} \text{I}, \quad (3.292)$$

$$\left. * \nabla_i H^{*i} = \frac{\partial H^{*i}}{\partial x^i} + \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i} H^{*i} = 0 \right\} \text{II}. \quad (3.293)$$

Из первого уравнения первой группы следует, что скалярное произведение псевдовекторов поля неголономности пространства и напряжённости магнитного поля есть функция плотности распределения заряда. Соответственно, если плотность заряда $\rho = 0$, псевдовекторы Ω_{*i} и H^{*i} взаимно ортогональны. Рассмотрим различные случаи ориентации магнитного поля по отношению к полю неголономности пространства.

3.12.1 Магнитное поле сонаправлено с полем неголономности

Пусть псевдовектор напряжённости магнитного поля H^{*i} направлен вдоль оси z , т.е. так же как и псевдовектор угловой скорости вращения пространства $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikm} A_{km}$. Тогда у псевдовектора угловой скорости отлична от нуля компонента $\Omega^{*3} = \Omega$, а у псевдовектора магнитной напряжённости

$$\begin{aligned} H^{*3} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{3mn} H_{mn} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{312} H_{12} + \varepsilon^{321} H_{21}) = H_{12} = \\ &= \frac{\varphi}{c} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{2\varphi}{c} \Omega. \end{aligned} \quad (3.294)$$

Условие постоянства скалярного электромагнитного потенциала ($\varphi = const$) является следствием равенства нулю электрической компоненты электромагнитного поля. При условии $\varphi = const$ уравнения Максвелла 1-й группы (3.292) принимают следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{*3} H^{*3} &= \frac{\Omega \varphi}{c} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \frac{2\varphi \Omega^2}{c} = -2\pi c \rho \\ \frac{\partial}{\partial y} (H_{*3} \sqrt{\hbar}) &= \frac{4\pi}{c} j^1 \sqrt{\hbar} \\ -\frac{\partial}{\partial x} (H_{*3} \sqrt{\hbar}) &= \frac{4\pi}{c} j^2 \sqrt{\hbar} \\ j^3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.295)$$

Уравнения 2-й группы (3.293) являются тривиальными, так как сводятся к простому соотношению $\frac{\partial H^{*3}}{\partial z} = 0$, т.е. $H^{*3} = const$. Фактически это означает, что рассматриваемое нами стационарное магнитное поле является однородным вдоль оси z . В дальнейшем мы

будем считать стационарное магнитное поле полностью однородным, т.е. $H^{*i} = const$.

Тогда из первого уравнения 1-й группы (3.295) следует, что магнитное поле является однородным, если

$$\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) = const, \quad \rho = -\frac{\varphi \Omega^2}{\pi c^2} = const. \quad (3.296)$$

Таким образом, плотность заряда $\rho > 0$, если скалярный потенциал поля $\varphi < 0$. В этом случае остальные уравнения 1-й группы (3.295) примут следующий вид

$$\left. \begin{aligned} j^1 &= \frac{c}{4\pi} \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial y} \\ j^2 &= \frac{c}{4\pi} \frac{\partial \ln \sqrt{h}}{\partial x} \\ j^3 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.297)$$

Отсюда, так как $h = 1 + \frac{\Omega^2(x^2 + y^2)}{c^2}$ (3.277), следует: вектор тока в стационарном однородном магнитном поле не равен нулю только при *сильном* поле неголономности, т.е. когда скорость вращения пространства сравнима со скоростью света. В слабом поле неголономности $h = 1$, следовательно $j^1 = j^2 = 0$.

Теперь, зная магнитную напряжённость из уравнений Максвелла, запишем покомпонентно векторные уравнения движения заряженной массовой частицы (3.290, 3.291) в нашем мире

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{2\Omega}{h} \left[\frac{\Omega^2 xy \dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2} \right) \dot{y} \right] + \Delta_{11}^1 \dot{x}^2 + 2\Delta_{12}^1 \dot{x} \dot{y} + \\ + \Delta_{22}^1 \dot{y}^2 = -\frac{eH}{mc} \left[-\frac{\Omega^2 xy \dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2} \right) \dot{y} \right] \\ \ddot{y} - \frac{2\Omega}{h} \left[\frac{\Omega^2 xy \dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2} \right) \dot{x} \right] + \Delta_{11}^2 \dot{x}^2 + 2\Delta_{12}^2 \dot{x} \dot{y} + \\ + \Delta_{22}^2 \dot{y}^2 = \frac{eH}{mc} \left[-\frac{\Omega^2 xy \dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2} \right) \dot{x} \right] \\ \ddot{z} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.298)$$

и в зазеркалье

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \Delta_{11}^1 \dot{x}^2 + 2\Delta_{12}^1 \dot{x}\dot{y} + \Delta_{22}^1 \dot{y}^2 &= \\ &= -\frac{eH}{mc} \left[-\frac{\Omega^2 xy \dot{x}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right) \dot{y} \right] \\ \ddot{y} + \Delta_{11}^2 \dot{x}^2 + 2\Delta_{12}^2 \dot{x}\dot{y} + \Delta_{22}^2 \dot{y}^2 &= \\ &= \frac{eH}{mc} \left[-\frac{\Omega^2 xy \dot{y}}{c^2} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right) \dot{x} \right] \\ \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.299)$$

Члены в правых частях уравнений, содержащие $\frac{\Omega^2}{c^2}$, возникают вследствие того, что при вращении пространства трёхмерная наблюдаемая метрика h_{ik} не является евклидовой. Поэтому в рассматриваемом случае есть различие между контравариантными и ковариантными компонентами наблюдаемой скорости. В правые части уравнений входят ковариантные компоненты скорости

$$v_2 = h_{21}v^1 + h_{22}v^2 = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2} \dot{x} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2}\right) \dot{y}, \quad (3.300)$$

$$v_1 = h_{11}v^1 + h_{12}v^2 = -\frac{\Omega^2 xy}{c^2} \dot{y} + \left(1 + \frac{\Omega^2 y^2}{c^2}\right) \dot{x}. \quad (3.301)$$

Если вращение пространства отсутствует, т.е. $\Omega = 0$, то уравнения движения заряженной массовой частицы нашего мира (3.298) с точностью до знака совпадают с уравнениями движения в стационарном однородном магнитном поле, приведёнными в книге Ландау и Лифшица (см. формулу 21.2 в §21 *Теории поля*)

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0, \quad (3.302)$$

тогда как из наших уравнений (3.298) следует

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{mc} \dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (3.303)$$

Это отличие обусловлено тем, что Ландау и Лифшиц положили в силе Лоренца магнитную напряжённость со знаком “плюс”, а

она у нас имеет знак “минус”, что, впрочем, не является принципиальным, так как связано с выбором сигнатурных условий. Если пространство вращается (неголономно), то в уравнения движения входят члены, содержащие Ω , $\frac{\Omega^2}{c^2}$, и $\frac{\Omega^4}{c^4}$.

В сильном поле неголономности решение уравнений движения — довольно сложная задача, возможно, в будущем их удастся решить методами приближенных вычислений на машинах (результаты были бы довольно интересными). Мы будем искать точные решения в слабом поле неголономности, т.е. пренебрегая членами второго и высших порядков малости. В этом случае уравнения движения (3.298, 3.299) примут следующий вид: для заряженной массовой частицы нашего мира

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = -\frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = \frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0, \quad (3.304)$$

для заряженной массовой частицы зазеркалья

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{mc}\dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{eH}{mc}\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (3.305)$$

Вначале решим уравнения для частицы нашего мира. Уравнение движения вдоль оси z интегрируется сразу. Его решение

$$z = \dot{z}_{(0)}\tau + z_{(0)}. \quad (3.306)$$

Отсюда видно: если в начальный момент скорость частицы в направлении оси z равна нулю, частица будет перемещаться только в плоскости xy . Остальные два уравнения движения из (3.304) перепишем в виде

$$\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -(2\Omega + \omega)\dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{d\tau} = (2\Omega + \omega)\dot{x}, \quad (3.307)$$

где, для удобства записи, мы обозначаем $\omega = \frac{eH}{mc}$. Такое же обозначение использовали Ландау и Лифшиц в §21 *Теории поля*.

Далее, выразим \dot{x} из второго уравнения, продифференцируем его по наблюдаемому времени и подставим в первое уравнение. В результате получаем уравнение

$$\frac{d^2\dot{y}}{d\tau^2} + (2\Omega + \omega)^2\dot{y} = 0, \quad (3.308)$$

т.е. уравнение колебаний, решение которого имеет вид

$$\dot{y} = C_1 \cos(2\Omega + \omega)\tau + C_2 \sin(2\Omega + \omega)\tau, \quad (3.309)$$

где $C_1 = \dot{y}_{(0)}$ и $C_2 = \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}$ константы интегрирования. Подставляя \dot{y} (3.309) в первое уравнение (3.307), получаем

$$\frac{d\dot{x}}{d\tau} = -(2\Omega + \omega)\dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau - \ddot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau, \quad (3.310)$$

или, после интегрирования

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \cos(2\Omega + \omega)\tau + C_3, \quad (3.311)$$

где константа интегрирования $C_3 = \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}$.

После подстановки всех констант полученные выражения для \dot{x} (3.311) \dot{y} (3.309) принимают окончательный вид

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \cos(2\Omega + \omega)\tau + \\ + \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}, \end{aligned} \quad (3.312)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \sin(2\Omega + \omega)\tau. \quad (3.313)$$

Таким образом, выражения для компонент скорости частицы \dot{x} и \dot{y} в стационарном однородном магнитном поле суть уравнения гармонических колебаний с частотой, равной, при слабом поле неголономности, $2\Omega + \omega = 2\Omega + \frac{eH}{mc}$.

Из интеграла живых сил в стационарном магнитном поле (3.289) следует, что квадрат скорости частицы — величина постоянная. Вычисляя квадрат физической наблюдаемой скорости для частицы нашего мира, получаем, что величина

$$\begin{aligned} v^2 = \dot{x}_{(0)}^2 + \dot{y}_{(0)}^2 + \dot{z}_{(0)}^2 + 2 \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \right) \times \\ \times \left[\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} + \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \cos(2\Omega + \omega)\tau \right] \end{aligned} \quad (3.314)$$

является постоянной ($v^2 = const$) при условии, что константа интегрирования C_3 равна тому же выражению, что и в уравнении для

\dot{x} (3.311), которое мы получили ранее, то есть эта константа равна $C_3 = \dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} = 0$.

Интегрируя \dot{x} и \dot{y} по наблюдаемому времени τ , получаем координаты заряженной частицы нашего мира, движущейся в стационарном однородном магнитном поле

$$x = \left[\frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \sin(2\Omega + \omega)\tau - \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau \right] \times \\ \times \frac{1}{2\Omega + \omega} + \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \right) \tau + C_4, \quad (3.315)$$

$$y = \left[\dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \cos(2\Omega + \omega)\tau \right] \times \\ \times \frac{1}{2\Omega + \omega} + C_5, \quad (3.316)$$

где константы интегрирования

$$C_4 = x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}, \quad C_5 = y_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{(2\Omega + \omega)^2}. \quad (3.317)$$

Из выражения для координаты x видно: частица совершает гармоническое колебание в направлении x , если выполняется соотношение $\dot{x}_{(0)} + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} = 0$. Это является также условием постоянства квадрата скорости частицы (3.314), т.е. удовлетворяет интегралу живых сил.

С учётом этого мы получаем уравнение траектории частицы в плоскости xy

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{(2\Omega + \omega)^2} \left[\dot{y}_{(0)}^2 + \frac{\ddot{y}_{(0)}^2}{(2\Omega + \omega)^2} \right] - \frac{2C_4}{2\Omega + \omega} \times \\ \times \left[\dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \sin(2\Omega + \omega)\tau \right] + \\ + \left[\dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} \cos(2\Omega + \omega)\tau \right] \times \\ \times \frac{2C_5}{2\Omega + \omega} + C_4^2 + C_5^2. \quad (3.318)$$

Если положить в начальный момент $\ddot{y}_{(0)} = 0$, а также константы интегрирования C_4 и C_5 равными нулю, то полученные нами выра-

жения для координат частицы (3.315, 3.316), существенно упрощаются

$$x = -\frac{1}{2\Omega + \omega} \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau, \quad (3.319)$$

$$y = \frac{1}{2\Omega + \omega} \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau. \quad (3.320)$$

Тогда наше уравнение траектории (3.318) принимает вид простого уравнения окружности

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_{(0)}^2}{(2\Omega + \omega)^2}. \quad (3.321)$$

Таким образом, если начальная скорость заряженной частицы нашего мира относительно оси направления стационарного магнитного поля (оси z) равна нулю, частица движется в плоскости xy по *окружности* радиусом

$$r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega} = \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega + \frac{eH}{mc}}, \quad (3.322)$$

зависящим от напряжённости поля и скорости вращения пространства. Если начальная скорость частицы в направлении магнитного поля отлична от нуля, её движение происходит по *винтовой линии* радиусом r .

В общем случае частица описывает в плоскости xy эллипс (3.318), форма которого отклоняется от окружности в зависимости от начальных условий движения частицы.

Как легко видеть, полученное нами решение полностью совпадает с решением из §21 *Теории поля*

$$x = -\frac{1}{\omega} \dot{y}_{(0)} \cos \omega \tau, \quad y = \frac{1}{\omega} \dot{y}_{(0)} \sin \omega \tau, \quad (3.323)$$

если положить вращение пространства $\Omega = 0$, т.е. в отсутствие поля неголономности. Тогда радиус траектории частицы $r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} = \frac{mc}{eH} \dot{y}_{(0)}$ не зависит от скорости вращения пространства. Если $\Omega \neq 0$, поле неголономности пространства возмущает движение частиц в магнитном поле, складываясь с полем магнитной напряжённости, что проявляется в уравнениях теории в виде поправки 2Ω к величине $\omega = \frac{eH}{mc}$. Заметим, мы рассмотрели частицы лишь в слабом поле

неголономности. В сильном поле неголономности, когда величину Ω нельзя считать пренебрежимо малой по сравнению со скоростью света, эти влияния сказываются ещё сильнее.

Вместе с тем в неголономном пространстве аргумент тригонометрических функций в наших уравнениях содержит *сумму двух членов*, один из которых является следствием взаимодействия заряда частицы с напряжённостью магнитного поля, а другой — проявлением вращения самого пространства, не зависящим ни от электрического заряда частицы, ни от наличия магнитного поля. Это позволяет рассмотреть два особых случая движения частицы в неголономном пространстве.

В первом случае, когда частица является электрически нейтральной или магнитное поле отсутствует, её движение будет таким же, как и под действием магнитной составляющей силы Лоренца, только за счёт влияния угловой скорости вращения пространства 2Ω , сравнимой с величиной $\omega = \frac{eH}{mc}$.

Насколько это может проявиться в реальной жизни? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо хотя бы приблизительно оценить отношение величин скорости вращения пространства Ω и напряжённости магнитного поля H в каком-то конкретном случае. Лучше всего это сделать на примере атома, так как в масштабах электронных орбит электромагнитное взаимодействие на несколько порядков превосходит остальные, и, кроме того, орбитальные скорости электронов сравнительно велики.

Сделать такую оценку нам поможет движение заряженной частицы в однородном стационарном магнитном поле, при условии

$$\frac{eH}{mc} = -2\Omega, \quad (3.324)$$

и, следовательно, аргумент тригонометрических функций в уравнениях движения становится равным нулю.

Рассмотрим систему отсчёта наблюдателя, пространство отсчёта которого связано с атомным ядром. Будем полагать, что электроны движутся по своим орбитальным траекториям вследствие их увлечения вращением пространства ядра. Будем также считать это увлечение полным, т.е. коэффициент увлечения, равным единице и, следовательно, скорость орбитального движения электрона, равной скорости вращения пространства ядра на этой орбите. Тогда

для электрона в атоме искомое отношение (в СГСЭ и гауссовой системе единиц) равно

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{H} &= -\frac{e}{2m_e c} = -\frac{4.8 \times 10^{-10}}{18.2 \times 10^{-28} \cdot 3.0 \times 10^{10}} = \\ &= -8.8 \times 10^6 \text{ см}^{1/2} \text{ грамм}^{-1/2}, \end{aligned} \quad (3.325)$$

где знак “минус” — следствие того, что Ω и H при рассматриваемом соотношении (3.324) направлены в противоположные стороны. Таким образом, поле неголономности пространства ядра является основным фактором, влияющим на движение орбитального электрона, по сравнению с магнитной составляющей связывающей их силы Лоренца.

Теперь перейдём к решению уравнений движения частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле (3.305), которые совпадают с уравнениями движения в отсутствии поля неголономности пространства [10]

$$\ddot{x} = -\omega \dot{y}, \quad \ddot{y} = \omega \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (3.326)$$

Решение третьего уравнения движения (вдоль оси z) есть тривиальный интеграл $z = \dot{z}_{(0)}\tau + z_{(0)}$.

Уравнения движения вдоль осей x и y аналогичны уравнениям для частицы нашего мира, только в аргументе тригонометрических функций вместо $\omega + 2\Omega$ стоит ω

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin \omega \tau - \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} \cos \omega \tau + \dot{x}_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}, \quad (3.327)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos \omega \tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} \sin \omega \tau, \quad (3.328)$$

и суть уравнения гармонических колебаний с частотой $\omega = \frac{eH}{mc}$. Их решения, т.е. выражения для координат частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле, имеют вид

$$x = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} \sin \omega \tau - \dot{y}_{(0)} \cos \omega \tau \right) + \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \right) \tau + C_4, \quad (3.329)$$

$$y = \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_{(0)} \sin \omega \tau + \frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} \cos \omega \tau \right) + C_5, \quad (3.330)$$

где константы интегрирования равны

$$C_4 = x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}, \quad C_5 = y_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega^2}. \quad (3.331)$$

Как мы уже упоминали, из интеграла живых сил в стационарном магнитном поле (3.289) следует постоянство релятивистской массы частицы и, следовательно, квадрата её наблюдаемой скорости. Тогда, возводя в квадрат решения для скоростей \dot{x} , \dot{y} , \dot{z} , частицы зазеркалья и складывая их, получаем, что величина

$$v^2 = \dot{x}_{(0)}^2 + \dot{y}_{(0)}^2 + \dot{z}_{(0)}^2 + 2 \left(\dot{x}_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \right) \left(\frac{\ddot{y}_{(0)}}{\omega} + \dot{y}_{(0)} \sin \omega \tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos \omega \tau \right) \quad (3.332)$$

является постоянной $v^2 = const$, если выполняется условие

$$\dot{x}_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} = 0. \quad (3.333)$$

Из выражения для координаты x (3.329) следует, что частица совершает колебания чисто гармонического типа в направлении x , если выполняется это же условие.

С учётом этого, возводя в квадрат и суммируя полученные выражения для координат x (3.329) и y (3.330) частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле, получаем уравнение её траектории в плоскости xy

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{\omega^2} \left(\dot{y}_{(0)}^2 + \frac{\ddot{y}_{(0)}^2}{\omega^2} \right) - \frac{2C_4}{\omega} \left(\dot{y}_{(0)} \cos \omega \tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \sin \omega \tau \right) + \left(\dot{y}_{(0)} \sin \omega \tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos \omega \tau \right) \frac{2C_5}{\omega} + C_4^2 + C_5^2, \quad (3.334)$$

которое отличается от уравнения траектории частицы нашего мира (3.318) лишь заменой $\omega + 2\Omega$ на ω и значениями констант интегрирования (3.331).

Таким образом, заряженная частица зазеркалья, начальная скорость которой вдоль оси z (направление напряжённости магнитного поля) равна нулю, движется по *эллипсу* в плоскости xy .

Если положить $\dot{y}_{(0)}$, а также константы C_4 и C_5 , равными нулю, решения для координат примут более простой вид

$$x = -\frac{1}{\omega} \dot{y}_{(0)} \cos \omega \tau, \quad y = \frac{1}{\omega} \dot{y}_{(0)} \sin \omega \tau. \quad (3.335)$$

В этом упрощённом случае частица зазеркалья, покоящаяся в направлении поля, описывает в плоскости xu окружность

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_{(0)}^2}{\omega^2} \quad (3.336)$$

радиусом $r = \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} = \frac{mc}{eH} \dot{y}_{(0)}$. Соответственно, если начальная скорость частицы зазеркалья вдоль напряжённости магнитного поля (оси z) не равна нулю, она движется по *винтовой линии* вокруг направления магнитного поля.

Таким образом, движение заряженной частицы зазеркалья в стационарном однородном магнитном поле такое же, как и для частицы нашего мира в отсутствии поля неголономности пространства.

3.12.2 Магнитное поле ортогонально полю неголономности

Рассмотрим случай, когда псевдовектор напряжённости магнитного поля H^{*i} ортогонален псевдовектору поля неголономности пространства $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikm} A_{km}$. Тогда из первого уравнения 1-й группы уравнений Максвелла для стационарного магнитного поля (3.292) следует, что плотность заряда $\rho = 0$.

Пусть напряжённость магнитного поля направлена вдоль оси y (отлична от нуля только компонента $H^{*2} = H$), а поле неголономности по-прежнему направлено вдоль оси z (отлична от нуля только компонента $\Omega^{*3} = \Omega$). Будем считать также, что магнитное поле не только стационарно, но и однородно.

В этом случае единственная не равная нулю компонента магнитной напряжённости равна

$$H^{*2} = H_{31} = \frac{\varphi}{c} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) = const. \quad (3.337)$$

Тогда уравнения движения частицы нашего мира при слабом поле неголономности будут иметь вид

$$\ddot{x} + 2\Omega \dot{y} = \frac{eH}{mc} \dot{z}, \quad \ddot{y} - 2\Omega \dot{x} = 0, \quad \ddot{z} = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad (3.338)$$

или, обозначая $\omega = \frac{eH}{mc}$,

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \omega\dot{z}, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0, \quad \ddot{z} = -\omega\dot{x}. \quad (3.339)$$

Продифференцируем первое уравнение по τ и подставим в него \dot{y} и \dot{z} из второго и третьего уравнений

$$\ddot{x} + (4\Omega^2 + \omega^2)\dot{x} = 0. \quad (3.340)$$

Произведя замену переменных $\dot{x} = p$, получаем обычное уравнение колебаний

$$\ddot{p} + \tilde{\omega}^2 p = 0, \quad \tilde{\omega} = \sqrt{4\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{4\Omega^2 + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2}, \quad (3.341)$$

решение которого имеет вид

$$p = C_1 \cos \tilde{\omega}\tau + C_2 \sin \tilde{\omega}\tau, \quad (3.342)$$

где $C_1 = \dot{x}_{(0)}$ и $C_2 = \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2}$ константы интегрирования. Интегрируя $\dot{x} = p$ по τ , находим выражение для координаты x

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2} \cos \tilde{\omega}\tau + x_{(0)} + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2}, \quad (3.343)$$

где $x_{(0)} + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2} = C_3$ постоянная интегрирования.

Подставляя $\dot{x} = p$ (3.342) в уравнения движения относительно осей y и z (3.339), после интегрирования получаем

$$\dot{y} = \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}} \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega}\tau - \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \ddot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega}\tau + \dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \dot{x}_{(0)}, \quad (3.344)$$

$$\dot{z} = \frac{\omega}{\tilde{\omega}^2} \ddot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega}\tau - \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega}\tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{\omega}{\tilde{\omega}^2} \dot{x}_{(0)}, \quad (3.345)$$

где $\dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2} = C_4$ и $\dot{z}_{(0)} - \frac{\omega\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2} = C_5$ постоянные интегрирования. Далее, интегрируя это уравнение по τ , находим выражения для координат y и z

$$y = -\frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \left(\dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}\tau \right) + \dot{y}_{(0)}\tau + \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \dot{x}_{(0)}\tau + y_{(0)} + \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \dot{x}_{(0)}, \quad (3.346)$$

$$z = \frac{\omega}{\omega^2} \left(\dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} \tau \right) + \dot{z}_{(0)} \tau - \frac{\omega}{\omega^2} \ddot{x}_{(0)} \tau + z_{(0)} - \frac{\omega}{\omega^2} \dot{x}_{(0)}, \quad (3.347)$$

в которых $y_{(0)} + \frac{2\Omega \dot{x}_{(0)}}{\omega^2} = C_6$ и $z_{(0)} - \frac{\omega \dot{x}_{(0)}}{\omega^2} = C_7$.

Если $\Omega = 0$, т.е. в отсутствии вращения пространства, а также при равенстве нулю некоторых констант интегрирования, полученные нами уравнения полностью совпадают с известными выражениями релятивистской электродинамики для случая, когда стационарное однородное магнитное поле направлено вдоль оси z

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega} \sin \tilde{\omega} \tau, \quad y = y_{(0)} + \dot{y}_{(0)} \tau, \quad z = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega} \cos \tilde{\omega} \tau. \quad (3.348)$$

Так как из интеграла живых сил следует постоянство квадрата наблюдаемой скорости частицы в стационарном магнитном поле, вычислим величину $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Подставляя найденные выражения для компонент скорости, получаем

$$v^2 = \dot{x}_{(0)}^2 + \dot{y}_{(0)}^2 + \dot{z}_{(0)}^2 + \frac{2}{\omega} (\dot{x}_{(0)} + 2\Omega \dot{y}_{(0)} - \omega \dot{z}_{(0)}) \times \left(\frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} + \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega} \tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \cos \tilde{\omega} \tau \right), \quad (3.349)$$

т.е. $v^2 = \text{const}$ при условии

$$\ddot{x}_{(0)} + 2\Omega \dot{y}_{(0)} - \omega \dot{z}_{(0)} = 0. \quad (3.350)$$

Уравнение траектории частицы в стационарном однородном магнитном поле, ортогональном полю неголономности, находим, вычисляя $x^2 + y^2 + z^2$. В результате получается довольно сложное выражение

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\omega^2} \left(\dot{x}_{(0)}^2 + \frac{\dot{x}_{(0)}^2}{\omega^2} \right) + C_3^2 + C_6^2 + C_7^2 + (C_4^2 + C_5^2) \tau^2 + 2(C_4 C_6 + C_5 C_7) \tau + \left[(\omega C_7 - 2\Omega C_6) + 2(\omega C_5 - 2\Omega C_6) \tau \right] \left(\dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} \tau \right) \frac{1}{\omega^2} + \frac{2C_3}{\omega^2} \left(\dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau - \frac{\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} \tau \right), \quad (3.351)$$

в котором присутствуют линейный и квадратичный (по времени) члены, а также параметрический член и два гармонических члена. В частном случае, если положить константы интегрирования равными нулю, полученное выражение (3.351) принимает вид обычного уравнения *сферы*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\tilde{\omega}^2} \left(\dot{x}_{(0)}^2 + \frac{\ddot{x}_{(0)}^2}{\omega^2} \right), \quad (3.352)$$

радиус которой равен

$$r = \frac{1}{\tilde{\omega}} \sqrt{\dot{x}_{(0)}^2 + \frac{\ddot{x}_{(0)}^2}{\omega^2}}, \quad (3.353)$$

где частота равна $\tilde{\omega} = \sqrt{4\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{4\Omega^2 + \left(\frac{eH}{mc}\right)^2}$.

Таким образом, заряженная частица нашего мира движется в стационарном однородном магнитном поле, ортогональном полю неголономности, по поверхности *сферы* с радиусом, являющимся функцией магнитной напряжённости и скорости вращения пространства. В частном случае, когда поле неголономности пространства отсутствует, а начальное ускорение частицы равно нулю, наше уравнение траектории существенно упрощается, принимая вид уравнения сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\omega^2} \dot{x}_{(0)}^2, \quad r = \frac{1}{\omega} \dot{x}_{(0)} = \frac{mc}{eH} \dot{x}_{(0)} \quad (3.354)$$

с радиусом, зависящим только от взаимодействия заряда частицы с магнитным полем — результат, хорошо известный в электродинамике (см. §21 в *Теории поля*). Для частицы зазеркалья, движущейся в стационарном однородном магнитном поле, ортогональном полю неголономности, уравнения движения имеют вид

$$\ddot{x} = \frac{eH}{mc} \dot{z}, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -\frac{eH}{mc} \dot{x}, \quad (3.355)$$

который отличается от уравнений движения частицы нашего мира (3.338) лишь отсутствием членов, включающих скорость вращения пространства Ω . На практике это приводит к тому, что в зазеркалье решения уравнений просто не зависят от вращения пространства и совпадают с приведёнными решениями для нашего мира в отсутствии поля неголономности.

3.13 Движение заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле

В этом параграфе нам предстоит исследовать движение заряженной частицы в том случае, когда одновременно присутствуют электрическая и магнитная составляющие стационарного однородного электромагнитного поля. В качестве “фона” мы рассмотрим неголономное пространство, вращающееся относительно оси z с постоянной угловой скоростью $\Omega_{12} = -\Omega_{21} = \Omega$, т.е. пространство с метрикой вида (3.275). В пространстве с такой метрикой мы имеем $F_i = 0$ и $D_{ik} = 0$.

Мы будем решать задачу в приближении, что поле неголономности является *слабым*, следовательно, трёхмерное наблюдаемое пространство имеет евклидову метрику. В этом случае уравнения Максвелла для стационарного поля (3.215, 3.216) принимают следующий вид

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{*m} H^{*m} &= -2\pi c\rho \\ \varepsilon^{ikm} \nabla_k (H_{*m} \sqrt{h}) &= \frac{4\pi}{c} j^i \sqrt{h} = 0 \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (3.356)$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{*m} E^m &= 0 \\ \varepsilon^{ikm} \nabla_k (E_m \sqrt{h}) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II,} \quad (3.357)$$

так как условием наблюдаемой однородности поля является равенство нулю его х.и.-производной [9], а в рассматриваемом конкретном случае х.и.-символы Кристоффеля равны нулю (метрика является галилеевой) и х.и.-производная совпадает с обычной производной. Таким образом, из уравнений Максвелла следует, что в данном случае выполняются следующие условия:

- 1) поле неголономности и электрическое поле взаимно ортогональны ($\Omega_{*m} E^m = 0$);
- 2) поле неголономности и магнитное поле взаимно ортогональны ($\Omega_{*m} H^{*m} = 0$), таким образом, плотность электрических зарядов равна нулю ($\rho = 0$);
- 3) ток отсутствует ($j^i = 0$).

Последнее условие свидетельствует, что присутствие тока $j^i \neq 0$ является следствием неоднородности магнитного поля. Итак, поскольку поле неголономности ортогонально электрическому полю,

можно рассматривать движение частицы при двух случаях взаимной ориентации полей:

- 1) $\vec{H} \perp \vec{E}$ и $\vec{H} \parallel \vec{\Omega}$;
- 2) $\vec{H} \parallel \vec{E}$ и $\vec{H} \perp \vec{\Omega}$.

В обоих случаях условимся: вектор электрической напряжённости направлен вдоль оси x . При используемой метрике (3.275) псевдовектор вращения пространства направлен вдоль оси z . Таким образом, в первом случае магнитная напряжённость направлена вдоль оси z , во втором случае — вдоль оси x .

Уравнения движения заряженной частицы в стационарном электромагнитном поле при условии, что вектор электрической напряжённости поля направлен вдоль оси x , имеют следующий вид: при движении заряженной частицы нашего мира

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{eE_1}{c^2} \frac{dx}{d\tau}, \quad (3.358)$$

$$\frac{d}{d\tau}(mv^i) + 2mA_k^i v^k = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right), \quad (3.359)$$

при движении частицы зазеркалья

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{eE_1}{c^2} \frac{dx}{d\tau}, \quad (3.360)$$

$$\frac{d}{d\tau}(mv^i) = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right). \quad (3.361)$$

Как и раньше, рассмотрим случай *отталкивания* частицы полем. Тогда компоненты напряжённости электрического поля E_i , направленной вдоль оси x , равны*

$$E_1 = E_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \text{const} = -E, \quad E_2 = E_3 = 0. \quad (3.362)$$

Интегрирование теоремы живых сил даёт интеграл живых сил для нашего мира и для зазеркалья (соответственно)

$$m = \frac{eE}{c^2} x + B, \quad m = -\frac{eE}{c^2} x + \widetilde{B}. \quad (3.363)$$

* В галилеевой системе отчёта нет разницы между контравариантными и ковариантными индексами тензорных величин.

Здесь B константа интегрирования в нашем мире и \widetilde{B} константа интегрирования в зазеркалье, вычисляемые из начальных условий в момент $\tau = 0$, составляют

$$B = m_{(0)} - \frac{eE}{c^2} x_{(0)}, \quad \widetilde{B} = m_{(0)} + \frac{eE}{c^2} x_{(0)}, \quad (3.364)$$

где $m_{(0)}$ значение релятивистской массы и $x_{(0)}$ смещение частицы в начальный момент. Из полученных интегралов живых сил (3.363) следует: различия исследуемых случаев, вызванные разной ориентацией магнитной напряжённости \vec{H} , проявятся лишь в векторных уравнениях движения, а скалярные уравнения (3.358, 3.360) и их решения (3.363) будут одинаковыми.

Отметим, что вектор \vec{E} можно направить и вдоль оси y , но нельзя по оси z , так как в пространстве с данной метрикой вдоль оси z направлено поле неголономности $\vec{\Omega}$, а из 2-й группы уравнений Максвелла (3.357) следует, что электрическая напряжённость \vec{E} ортогональна полю неголономности $\vec{\Omega}$.

Теперь, учитывая результаты интегрирования теоремы живых сил в нашем мире и в зазеркалье (3.363), запишем в покомпонентном виде векторные (пространственные) уравнения движения частицы в стационарном однородном электрическом и магнитном полях для всех рассматриваемых случаев.

Случай 1. Пусть $\vec{H} \perp \vec{E}$ и $\vec{H} \parallel \vec{\Omega}$, т.е. магнитная напряжённость \vec{H} направлена вдоль оси z (параллельно полю неголономности).

Тогда из всех компонент напряжённости магнитного поля не равной нулю является лишь компонента

$$H^{*3} = H_{12} = \frac{\varphi}{c} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) + \frac{2\varphi}{c} A_{12} = \text{const} = H. \quad (3.365)$$

Соответственно, векторные уравнения движения принимают вид (покомпонентно) для частицы нашего мира

$$\left. \begin{aligned} \frac{eE}{c^2} \dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) (\ddot{x} + 2\Omega \dot{y}) &= eE - \frac{eH}{c} \dot{y} \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) (\dot{y} - 2\Omega \dot{x}) &= \frac{eH}{c} \dot{x} \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.366)$$

а для частицы зазеркалья

$$\left. \begin{aligned} \frac{eE}{c^2} \dot{x}^2 + \left(\tilde{B} - \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{x} &= eE - \frac{eH}{c} \dot{y} \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{y} + \left(\tilde{B} - \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{y} &= \frac{eH}{c} \dot{x} \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{z} + \left(\tilde{B} - \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.367)$$

Кроме того, из 1-й группы уравнений Максвелла (3.356) следует, что в рассматриваемом случае, когда магнитное поле и поле неголономности параллельны, имеет место условие

$$\Omega_{*3} H^{*3} = -2\pi c \rho, \quad (3.368)$$

где $\Omega_{*3} = \Omega = const$ и $H^{*3} = H = const$, т.е. вращение пространства стационарно и магнитное поле стационарно.

Таким образом, данная взаимная ориентация поля неголономности и магнитного поля возможна только в том случае, когда плотность электрических зарядов, как источников данного электромагнитного поля, равна нулю $\rho \neq 0$.

Случай 2. $\vec{H} \parallel \vec{E}$, $\vec{H} \perp \vec{\Omega}$ и $\vec{E} \perp \vec{\Omega}$, т.е. магнитная и электрическая напряжённости направлены вдоль оси x , а поле неголономности по-прежнему вдоль оси z .

В этом случае взаимной ориентации полей из всех компонент напряжённости магнитного поля не равна нулю только её первая компонента вдоль оси x

$$H^{*1} = H_{23} = \frac{\varphi}{c} \left(\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial y} \right) = const = H, \quad (3.369)$$

и, соответственно, векторные уравнения движения принимают вид (покомпонентно) для частицы нашего мира

$$\left. \begin{aligned} \frac{eE}{c^2} \dot{x}^2 + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) (\ddot{x} + 2\Omega \dot{y}) &= eE \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{y} + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) (\ddot{y} - 2\Omega \dot{x}) &= -\frac{eH}{c} \dot{z} \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{z} + \left(B + \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{z} &= \frac{eH}{c} \dot{y} \end{aligned} \right\}, \quad (3.370)$$

а для частицы зазеркалья

$$\left. \begin{aligned} \frac{eE}{c^2} \dot{x}^2 + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{x} &= eE \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{y} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{y} &= -\frac{eH}{c} \dot{z} \\ \frac{eE}{c^2} \dot{x} \dot{z} + \left(\widetilde{B} - \frac{eE}{c^2} x \right) \ddot{z} &= \frac{eH}{c} \dot{y} \end{aligned} \right\}. \quad (3.371)$$

Теперь, когда мы выписали уравнения движения заряженной частицы для всех случаев взаимной ориентации электрического поля, магнитного поля и поля неголономности, приступим к их решению.

3.13.1 Магнитное поле ортогонально электрическому и параллельно полю неголономности пространства

Будем решать векторные уравнения движения заряженной частицы (3.366, 3.367), полагая абсолютную величину её наблюдаемой скорости малой по сравнению со скоростью света. Тогда можно считать массу частицы в начальный момент, равной её массе покоя

$$m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cong m_0. \quad (3.372)$$

Положим также, что численное значение напряжённости электрического поля E настолько мало, что член $\frac{eEx}{c^2}$ стремится к нулю и, следовательно, им можно пренебречь. В этом случае векторные уравнения движения заряженной частицы примут следующий вид: для частицы нашего мира

$$\left. \begin{aligned} m_0 (\ddot{x} + 2\Omega \dot{y}) &= eE - \frac{eH}{c} \dot{y} \\ m_0 (\ddot{y} - 2\Omega \dot{x}) &= \frac{eH}{c} \dot{x} \\ m_0 \ddot{z} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.373)$$

для частицы зазеркалья

$$m_0 \ddot{x} = eE - \frac{eH}{c} \dot{y}, \quad m_0 \ddot{y} = \frac{eH}{c} \dot{x}, \quad m_0 \ddot{z} = 0. \quad (3.374)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями, выведенными при решении аналогичной задачи в §22 *Теории поля*, в том случае, когда поле вращения пространства отсутствует (иными словами, пространство не вращается, $\Omega = 0$), а напряжённость электрического поля направлена вдоль оси x .

Полученные уравнения для частицы зазеркалья суть частный случай уравнений для нашего мира при $\Omega = 0$. Поэтому достаточно проинтегрировать уравнения в нашем мире, а их решения в зазеркалье получаются автоматически, если положить поле неголономности пространства $\Omega = 0$.

Интегрируя уравнение движения вдоль оси z , получаем

$$z = \dot{z}_{(0)} \tau + z_{(0)}. \quad (3.375)$$

Интегрируя второе уравнение (вдоль оси y), имеем

$$\dot{y} = \left(2\Omega + \frac{eH}{m_0 c} \right) x + C_1, \quad C_1 = \dot{y}_{(0)} - \left(2\Omega + \frac{eH}{m_0 c} \right) x_{(0)}. \quad (3.376)$$

Подставляя \dot{y} в первое уравнения (3.373), получаем дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно x

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{eE}{m_0} + \omega^2 x_{(0)} - \omega \dot{y}_{(0)}, \quad (3.377)$$

где $\omega = 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}$. Вводя новую переменную

$$u = x - \frac{A}{\omega^2}, \quad A = \frac{eE}{m_0} + \omega^2 x_{(0)} - \omega \dot{y}_{(0)}, \quad (3.378)$$

получаем уравнение гармонических колебаний

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (3.379)$$

решение которого имеет вид

$$u = C_2 \cos \omega \tau + C_3 \sin \omega \tau, \quad (3.380)$$

где константы интегрирования равны $C_2 = u_{(0)}$ и $C_3 = \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega}$.

Возвращаясь к переменной x путём обратной подстановки переменных (т.е. в обратной последовательности по отношению к тому, как мы делали только что), получаем окончательное выражение для

искомой координаты x

$$x = \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0 \omega} \right) \cos \omega \tau + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega} \sin \omega \tau + \frac{eE}{m_0 \omega^2} + x_{(0)} - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}. \quad (3.381)$$

Подставляя это выражение для x в уравнение для \dot{y} (3.376), после интегрирования получаем выражение для координаты y

$$y = \frac{1}{\omega} \left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0 \omega} \right) \sin \omega \tau - \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega} \cos \omega \tau + \frac{eE}{m_0 \omega^2} + y_{(0)} + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}. \quad (3.382)$$

Решения векторных уравнений движения в зазеркалье будут иметь точно такой же вид, но, так как в зазеркалье $\Omega = 0$, то частота будет равна $\omega = \frac{eH}{m_0 c}$

Энергия частицы нашего мира и частицы зазеркалья, соответственно, имеет вид $E = mc^2$ и $E = -mc^2$.

Трёхмерный импульс заряженной частицы нашего мира в стационарном однородном электромагнитном поле (когда магнитное поле ортогонально к электрическому полю и параллельно полю негомоности) составляет

$$\left. \begin{aligned} p^1 &= m_0 \dot{x} = \left(\frac{eE}{\omega} - m_0 \dot{y}_{(0)} \right) \sin \omega \tau + m_0 \dot{x}_{(0)} \cos \omega \tau \\ p^2 &= m_0 \dot{y} = \left(\frac{2\Omega m_0}{\omega} + \frac{eH}{\omega c} \right) \left(\frac{eE}{m_0 \omega} - \dot{y}_{(0)} \right) + m_0 \dot{y}_{(0)} + \\ &\quad + \left(\frac{2\Omega m_0}{\omega} + \frac{eH}{\omega c} \right) \left[\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0 \omega} \right) \cos \omega \tau + \dot{x}_{(0)} \sin \omega \tau \right] \\ p^3 &= m_0 \dot{z} = m_0 \dot{z}_{(0)} \end{aligned} \right\}. \quad (3.383)$$

Отсюда видно: импульс заряженной частицы нашего мира в рассматриваемой конфигурации полей испытывает гармонические колебания в направлениях x и y , а в направлении z является линейной функцией от наблюдаемого времени τ (в случае, когда начальная скорость частицы $\dot{z} \neq 0$). Частота данных колебаний в плоскости xu равна $\omega = 2\Omega + \frac{eH}{m_0 c}$.

В зазеркалье при рассматриваемой конфигурации электрического поля, магнитного поля и поля неголономности трёхмерный импульс заряженной частицы равен

$$\left. \begin{aligned} p^1 &= \left(\frac{eE}{\omega} - m_0 \dot{y}_{(0)} \right) \sin \omega \tau + m_0 \dot{x}_{(0)} \cos \omega \tau \\ p^2 &= \frac{eE}{\omega} + m_0 \left[\left(\dot{y}_{(0)} - \frac{eE}{m_0 \omega} \right) \cos \omega \tau + \dot{x}_{(0)} \sin \omega \tau \right] \\ p^3 &= m_0 \dot{z}_{(0)} \end{aligned} \right\}, \quad (3.384)$$

где, в отличие от нашего мира, $\omega = \frac{eH}{m_0 c}$.

В заключение надо отметить, что получить точные решения уравнений движения заряженной частицы одновременно в электрическом и магнитных полях в общем виде весьма проблематично, так как в процессе решения там появляются эллиптические интегралы. Возможно, что в будущем, при особом желании или практической необходимости, их все-таки удастся решить в общем виде на машинах, но в нашу задачу это не входит.

Видимо, с такой же проблемой столкнулись Ландау и Лифшиц, так как в §22 *Теории поля*, рассматривая аналогичную задачу (но, в отличие от данной книги, общековариантными методами и без учёта поля неголономности пространства), они составляли уравнения движения и получали их решения, полагая, что заряженная частица движется с нерелятивистской скоростью, а электрическое поле является слабым $\frac{eEx}{c^2} \approx 0$.

3.13.2 Магнитное поле параллельно электрическому и ортогонально полю неголономности пространства

Будем решать векторные уравнения движения заряженной частицы (3.370, 3.371) в том же приближении, что и в первом случае. Тогда они примут вид для частицы нашего мира

$$\ddot{x} + 2\Omega \dot{y} = \frac{eE}{m_0}, \quad \ddot{y} - 2\Omega \dot{x} = -\frac{eH}{m_0 c} \dot{z}, \quad \ddot{z} = \frac{eH}{m_0 c} \dot{y}, \quad (3.385)$$

и для частицы зазеркалья

$$\ddot{x} = \frac{eE}{m_0}, \quad \ddot{y} = -\frac{eH}{m_0 c} \dot{z}, \quad \ddot{z} = \frac{eH}{m_0 c} \dot{y}. \quad (3.386)$$

Интегрируя первое уравнение движения (вдоль оси x) в нашем мире (3.385), получаем

$$\dot{x} = \frac{eE}{m_0} \tau - 2\Omega y + C_1, \quad (3.387)$$

где постоянная интегрирования, найденная из начальных условий, равна $C_1 = const = \dot{x}_{(0)} + 2\Omega y_{(0)}$.

Интегрируя третье уравнение (вдоль оси z), имеем

$$\dot{z} = \frac{eH}{m_0 c} y + C_2, \quad (3.388)$$

где постоянная интегрирования равна $C_2 = const = \dot{z}_{(0)} - \frac{eH}{m_0 c} y_{(0)}$.

Подставляя полученные выражения для \dot{x} и \dot{z} во второе уравнение движения (3.385), получаем линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно y

$$\ddot{y} + \left(4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2}{m_0^2 c^2} \right) y = \frac{2\Omega e E}{m_0} \tau + 2\Omega C_1 - \frac{eH}{m_0 c} C_2. \quad (3.389)$$

Мы будем решать это уравнение методом замены переменных. Вводя новую переменную u

$$u = y + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{eH}{m_0 c} C_2 - 2\Omega C_1 \right), \quad \omega^2 = 4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2}{m_0^2 c^2}, \quad (3.390)$$

получаем уравнение вынужденных колебаний

$$\ddot{u} + \omega^2 u = \frac{2\Omega e E}{m_0} \tau, \quad (3.391)$$

решение которого есть сумма общего решения уравнения свободных колебаний

$$\ddot{u} + \omega^2 u = 0, \quad (3.392)$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое можно записать в следующем виде

$$\ddot{u} = M\tau + N, \quad (3.393)$$

где $M = const$ и $N = const$. Продифференцировав \ddot{u} дважды по τ , подставив результаты в исходное уравнение (3.391) и приравняв получившиеся коэффициенты при τ , мы получаем линейные коэф-

коэффициенты

$$M = \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2}, \quad N = 0. \quad (3.394)$$

Тогда мы можем записать решение исходного неоднородного уравнения (3.391) в следующем общем виде

$$u = C_3 \cos \omega\tau + C_4 \sin \omega\tau + \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2} \tau, \quad (3.395)$$

где постоянные интегрирования, вычисленные подставив начальные условия в момент $\tau = 0$, равны $C_3 = u_{(0)}$ и $C_4 = \frac{\dot{u}_{(0)}}{\omega}$.

Возвращаясь к старой переменной y (3.390), получаем окончательное решение для этой координаты

$$y = \left[y_{(0)} + \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{eH}{m_0c} C_2 + 2\Omega C_1 \right) \right] \cos \omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \sin \omega\tau - \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{eH}{m_0c} C_2 + 2\Omega C_1 \right) + \frac{2\Omega eE}{m_0\omega^2} \tau. \quad (3.396)$$

Затем, подставив это выражение в уравнения для \dot{x} и \dot{z} , после интегрирования получаем решения для x и z

$$x = \frac{eE}{2m_0} \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \right) \tau^2 - \frac{2\Omega}{\omega} (y_{(0)} + A) \sin \omega\tau + \frac{2\Omega \dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos \omega\tau + (C_1 + 2\Omega A) \tau + C_5, \quad (3.397)$$

$$z = \frac{eH}{m_0c\omega} \left[(y_{(0)} + A) \sin \omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos \omega\tau \right] - \left(\frac{eH}{m_0c} A - C_2 \right) \tau + C_6, \quad (3.398)$$

где для сокращения записи мы обозначаем

$$A = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{eH}{m_0c} C_2 - 2\Omega C_1 \right), \quad (3.399)$$

а новые постоянные интегрирования равны

$$C_5 = x_0 - \frac{2\Omega \dot{y}_{(0)}}{\omega}, \quad C_6 = z_{(0)} + \frac{eH \dot{y}_{(0)}}{m_0c\omega^2}. \quad (3.400)$$

Если положить $\Omega = 0$, то из координат заряженной частицы нашего мира (3.396–3.398) мы автоматически получим решения для координат заряженной частицы в зазеркалье

$$x = \frac{eE}{2m_0} \tau^2 + \dot{x}_{(0)}\tau + x_{(0)}, \quad (3.401)$$

$$y = \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega} \cos \omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \sin \omega\tau - \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega} + y_{(0)}, \quad (3.402)$$

$$z = \frac{\dot{z}_{(0)}}{\omega} \sin \omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \cos \omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} + z_{(0)}. \quad (3.403)$$

Тогда компоненты трёхмерного импульса заряженной частицы нашего мира в стационарном однородном электромагнитном поле (когда магнитное поле параллельно электрическому и ортогонально к полю неголономности пространства) составляют

$$\left. \begin{aligned} p^1 &= m_0 \dot{x}_{(0)} + eE \left(1 - \frac{4\Omega^2}{\omega^2} \right) \tau - \\ &\quad - 2m_0\Omega \left[\frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \sin \omega\tau + (y_{(0)} + A) \cos \omega\tau - \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} - A \right] \\ p^2 &= m_0 \left[\dot{y}_{(0)} \cos \omega\tau - \omega (y_{(0)} + A) \sin \omega\tau \right] + \frac{2\Omega eE}{\omega^2} \\ p^3 &= m_0 \dot{z}_{(0)} + \frac{eH}{c} \times \\ &\quad \times \left[(y_{(0)} + A) \cos \omega\tau + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega} \sin \omega\tau - A + \frac{2\Omega eE}{m_0 \omega^2} \tau - y_{(0)} \right] \end{aligned} \right\}, \quad (3.404)$$

где частота ω равна

$$\omega = \sqrt{4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2}{m_0^2 c}}. \quad (3.405)$$

В зазеркалье, при данной конфигурации полей, компоненты трёхмерного импульса заряженной частицы равны

$$\left. \begin{aligned} p^1 &= m_0 \dot{x}_{(0)} + 2eE\tau \\ p^2 &= m_0 (\dot{y}_{(0)} \cos \omega\tau - \dot{z}_{(0)} \sin \omega\tau) \\ p^3 &= m_0 (\dot{z}_{(0)} \cos \omega\tau - \dot{y}_{(0)} \sin \omega\tau) \end{aligned} \right\}, \quad (3.406)$$

где, в отличие от нашего мира, частота равна $\omega = \frac{eH}{m_{(0)}c}$.

3.14 Заключение

Фактически, теорию, построенную в этой главе, можно наиболее точно назвать *хронометрически инвариантным представлением электродинамики в псевдоримановом пространстве*. Или, так как математический аппарат физических наблюдаемых величин подразумевает в своей основе псевдориманово пространство, просто — *хронометрически инвариантной электродинамикой* (сокращённо, ХЭД). Здесь мы привели лишь основы этой дисциплины:

- х.и.-компоненты тензора электромагнитного поля (тензора Максвелла);
- х.и.-уравнения Максвелла;
- закон сохранения электрического заряда в х.и.-форме;
- х.и.-условие Лоренца;
- х.и.-уравнения Даламбера (уравнения распространения волн) для скалярного потенциала и вектор-потенциала электромагнитного поля;
- х.и.-силу Лоренца;
- тензор энергии- импульса электромагнитного поля и его х.и.-компоненты;
- х.и.-уравнения движения массовой заряженной частице;
- геометрическую структуру четырёхмерного потенциала электромагнитного поля.

Сам предмет хронометрически инвариантной электродинамики в псевдоримановом пространстве, безусловно, куда более обширен. В дополнение к сделанному можно, например, вывести х.и.-уравнения движения заряда, распределённого в пространстве, можно рассмотреть движение частицы, обладающей собственным электромагнитным излучением, взаимодействующим с полем, можно получить уравнения движения для частицы, движущейся под произвольным углом к полю (как для отдельной частицы, так и в случае распределённого заряда), и многое другое.

Кроме того, естественно, здесь речь идёт о некантовой электродинамике. Как известно, математический аппарат хронометрических инвариантов создан для четырёхмерного псевдориманова пространства. В пространстве с другой геометрией операторы для формального определения физических наблюдаемых величин, естественно, также будут другими. Тем не менее, создание мате-

матических методов для определения физических наблюдаемых величин в пространстве квантовой механики и квантовой электродинамики в принципе также возможно: мы провели необходимые черновые работы в этом направлении и лишь недостаток времени, а также смещение фокуса наших научных интересов на другие, неизмеримо более интересные задачи, остановили создание *хронометрически инвариантной квантовой механики* и *хронометрически инвариантной квантовой электродинамики*.

4.1 Постановка задачи

В этой главе нам предстоит вывести динамические уравнения движения для частицы с внутренним механическим моментом (*спином*). Эти уравнения, как мы уже упоминали в 1-й главе, представляют собой уравнения параллельного переноса четырёхмерного динамического вектора частицы Q^α , представляющего собой сумму векторов Q^α и S^α , характеризующих частицу

$$Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha, \quad (4.1)$$

где $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ четырёхмерный вектор импульса частицы, а S^α четырёхмерный импульс, приобретаемый частицей за счёт внутреннего момента (спина), который делает её движение негеодезическим. Поэтому мы будем называть величину S^α четырёхмерным *спин-импульсом* частицы. Причём, так как компоненты динамического вектора частицы P^α известны, то для определения суммарного динамического вектора частицы Q^α нам необходимо получить только компоненты спин-импульса S^α , являющиеся некоторыми функциями спина самой частицы.

Таким образом, первым этапом наших действий должно стать определение собственно спина частицы как геометрической величины в четырёхмерном псевдоримановом пространстве. Затем, во втором параграфе этой главы, мы вычислим четырёхмерный импульс S^α , приобретаемый движущейся частицей за счёт своего спина. В третьем параграфе нам предстоит вывести собственно динамические уравнения движения частицы со спином в псевдоримановом пространстве и их физически наблюдаемые х.и.-проекции на

время и на пространство. Остальные параграфы будут посвящены движению элементарных частиц.

Итак, абсолютная величина спина частицы есть величина $\pm n\hbar$, измеряемая в долях постоянной Планка, где n так называемое *спиновое квантовое число*. На сегодняшний день известно, что для разных типов частиц это число принимает значения $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$. Причём знакопеременность \pm означает возможность правого или левого направления внутреннего вращения частицы. Кроме того, постоянная Планка имеет размерность момента импульса \hbar [грамм см² сек⁻¹]. Уже только это свидетельствует о том, что спин частицы по своей геометрической структуре должен быть аналогичен тензору момента импульса, т.е. представлять собой антисимметричный тензор 2-го ранга. Посмотрим, подтверждают ли это другие источники.

Согласно второму постулату Бора: “На длине круговой орбиты электрона уместается *целое* число волн де Бройля, соответствующее электрону в рамках концепции частица-волна”. То есть длина орбиты электрона $2\pi r$ равна k длинам волн де Бройля $\lambda = \frac{h}{p}$

$$2\pi r = k\lambda = k \frac{h}{p}, \quad (4.2)$$

где p величина орбитального импульса электрона. Учитывая, что постоянная Планка равна $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, равенство (4.2) принимает вид

$$rp = k\hbar. \quad (4.3)$$

Так как радиус-вектор орбиты электрона r^i ортогонален вектору его орбитального импульса p^k , данное выражение в тензорной записи есть векторное произведение

$$[r^i; p^k] = k\hbar^{ik}. \quad (4.4)$$

Отсюда видно, что постоянная Планка, вычисленная из второго постулата Бора в тензорном виде, предстаёт в виде антисимметричного тензора 2-го ранга. Однако такое представление о постоянной Планка связано с представлением об орбитальной структуре атома — системы более сложной, чем электрон или другие элементарные частицы. Тем не менее, спин, также определяемый этой постоянной, является внутренним свойством самих элементарных частиц.

Поэтому, параллельно со вторым постулатом Бора, необходимо рассмотреть геометрическую структуру постоянной Планка, исходя из какого-либо другого экспериментального соотношения, касающегося исключительно внутреннего строения самого электрона. Такую возможность нам дают известные опыты Отто Штерна и Вальтера Герлаха (1922). Одним из результатов этих опытов является вывод о том, что электрон обладает внутренним магнитным моментом L_m , который пропорционален его внутреннему механическому моменту (спину)

$$\frac{m_e}{e} L_m = n \hbar, \quad (4.5)$$

где e заряд электрона, m_e его масса и n спиновое квантовое число; для электрона $n = \frac{1}{2}$. Магнитный момент контура площадью $S = \pi r^2$, по которому течёт ток I , равен $L_m = IS$. Сила тока равна заряду e , делённому на период его циркуляции $T = \frac{2\pi r}{u}$ по данному контуру

$$I = \frac{eu}{2\pi r}, \quad (4.6)$$

где u величина скорости циркуляции заряда. Таким образом, внутренний магнитный момент электрона равен

$$L_m = \frac{1}{2} eur, \quad (4.7)$$

или в тензорном виде*

$$L_m^{ik} = \frac{1}{2} e [r^i; u^k] = \frac{1}{2} [r^i; p_m^k], \quad (4.8)$$

где r^i радиус-вектор циркуляции внутреннего тока электрона и u^k вектор скорости этой циркуляции. Отсюда видно, что постоянная Планка, вычисленная через внутренний магнитный момент электрона (4.5), также представляет собой векторное произведение двух векторов, т.е. антисимметричный тензор 2-го ранга

$$\frac{m_e}{2e} [r^i; p_m^k] = n \hbar^{ik}, \quad (4.9)$$

*Выражения (4.8, 4.9) записаны в пространстве Минковского, что вполне применимо для описания упомянутых опытов. В римановом пространстве результат интегрирования зависит от пути интегрирования. Поэтому радиус-вектор, так как он зависит от непрерывно меняющегося направления, в римановом пространстве не определён.

что подтверждает аналогичный вывод, сделанный нами из второго постулата Бора.

Соответственно, рассматривая внутриатомные и внутриэлектронные квантовые соотношения в четырёхмерном псевдоримановом пространстве, мы получаем четырёхмерный антисимметричный тензор Планка $\hbar^{\alpha\beta}$, пространственными компонентами которого являются трёхмерные величины \hbar^{ik} , т.е. тензор

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \hbar^{00} & \hbar^{01} & \hbar^{02} & \hbar^{03} \\ \hbar^{10} & \hbar^{11} & \hbar^{12} & \hbar^{13} \\ \hbar^{20} & \hbar^{21} & \hbar^{22} & \hbar^{23} \\ \hbar^{30} & \hbar^{31} & \hbar^{32} & \hbar^{33} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

причём данному антисимметричному тензору $\hbar^{\alpha\beta}$ соответствует *дуальный псевдотензор Планка* $\hbar^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} \hbar_{\mu\nu}$.

Таким образом, спин частицы в четырёхмерном псевдоримановом пространстве характеризуется антисимметричным тензором $n\hbar^{\alpha\beta}$, или дуальным ему псевдотензором $n\hbar^{*\alpha\beta}$. Причём в нашем чисто математически формальном подходе к описанию спина частицы совершенно не имеет значения физическая природа спина, достаточно лишь знать то, что это фундаментальное внутреннее свойство частицы характеризуется тензором (или псевдотензором) вышеупомянутого вида. Такой подход позволяет нам решать задачу о движении частиц со спином без каких-либо предварительных предположений об их внутреннем строении, т.е. чисто формальным математическим методом.

Итак, с геометрической точки зрения постоянная Планка есть антисимметричный тензор 2-го ранга с размерностью момента импульса независимо от того, через какие величины его получили: механические или электромагнитные. Последнее также означает, что тензор Планка характеризуется не просто вращением внутриатомных масс или каких-то масс внутри элементарных частиц, а является проявлением некоторого фундаментального квантового вращения самого пространства (природа которого остаётся не до конца ясной вплоть до сегодняшнего дня), устанавливающего все “элементарные” вращения в пространстве независимо от их физической природы.

Собственное вращение пространства характеризуется трёхмерным наблюдаемым х.и.-тензором A_{ik} (1.36), который представляет

собой результат опускания индексов $A_{ik} = h_{im} h_{kn} A^{mn}$ у компонент A^{mn} четырёхмерного контравариантного тензора

$$A^{\alpha\beta} = c h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} a_{\mu\nu}, \quad a_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu} \right). \quad (4.11)$$

В сопутствующей системе отсчёта ($b^i = 0$) вспомогательные величины $a_{\mu\nu}$ равны

$$a_{00} = 0, \quad a_{0i} = \frac{1}{2c^2} \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right), \quad a_{ik} = \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i} \right), \quad (4.12)$$

и компоненты четырёхмерного тензора вращения пространства принимают следующий вид

$$\left. \begin{aligned} A_{00} &= 0, & A_{0i} &= -A_{i0} = 0, \\ A_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_k - F_k v_i) \end{aligned} \right\}. \quad (4.13)$$

Без гравитационного поля тензор угловых скоростей вращения пространства выражается только через линейную скорость вращения v_i . Тогда мы обозначаем его $A_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}$

$$\Omega_{00} = 0, \quad \Omega_{0i} = -\Omega_{i0} = 0, \quad \Omega_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right). \quad (4.14)$$

С другой стороны, согласно концепции частица-волна каждой частице соответствует волна с энергией $E = mc^2 = \hbar\omega$, где m релятивистская масса частицы и ω её собственная частота. Иначе говоря, с геометрической точки зрения каждую частицу можно рассматривать как волну, определённую в бесконечно близкой окрестности геометрического места частицы, собственная частота которой зависит от некоторого распределения угловых скоростей $\omega_{\alpha\beta}$, определённого также в этой окрестности. Тогда упомянутое квантовое соотношение в тензорной записи принимает вид $mc^2 = \hbar^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}$.

Так как тензор Планка антисимметричен, то все его диагональные компоненты равны нулю. Его пространственно-временные (смешанные) компоненты в сопутствующей системе отсчёта также должны быть равными нулю аналогично соответствующим компонентам четырёхмерного тензора угловых скоростей вращения пространства (4.14). Значения пространственных (трёхмерных) ком-

понент тензора Планка, в соответствии с результатами общеизвестных экспериментов, демонстрирующих свойства спина частиц, составляют $\pm \hbar$ в зависимости от направления вращения и образуют трёхмерный наблюдаемый х.и.-тензор Планка \hbar^{ik} .

В случае левого внутреннего вращения компоненты \hbar^{12} , \hbar^{23} , \hbar^{31} имеют положительный знак, а компоненты \hbar^{13} , \hbar^{32} , \hbar^{21} отрицательный знак. Тогда геометрическая структура четырёхмерного тензора Планка, выраженная в виде матрицы, выглядит следующим образом

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hbar & -\hbar \\ 0 & -\hbar & 0 & \hbar \\ 0 & \hbar & -\hbar & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

При правом внутреннем вращении компоненты \hbar^{12} , \hbar^{23} , \hbar^{31} , наоборот, являются отрицательными, а компоненты \hbar^{13} , \hbar^{32} , \hbar^{21} положительными

$$\hbar^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar & \hbar \\ 0 & \hbar & 0 & -\hbar \\ 0 & -\hbar & \hbar & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Квадрат четырёхмерного тензора Планка вычисляется следующим образом

$$\begin{aligned} \hbar_{\alpha\beta} \hbar^{\alpha\beta} = 2\hbar^2 & \left[(g_{11} g_{22} - g_{12}^2) + (g_{11} g_{33} - g_{13}^2) + \right. \\ & + (g_{22} g_{33} - g_{23}^2) + 2(g_{12} g_{23} - g_{22} g_{13} - \\ & \left. - g_{12} g_{33} + g_{13} g_{23} - g_{11} g_{23} + g_{12} g_{13}) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

и в пространстве Минковского, когда система отсчёта является галилеевой и метрика принимает диагональный вид (2.70), численно равен $\hbar_{\alpha\beta} \hbar^{\alpha\beta} = 6\hbar^2$. В псевдоримановом пространстве значение $\hbar_{\alpha\beta} \hbar^{\alpha\beta}$ вычисляется при подстановке в (4.17) зависимости трёхмерных компонент фундаментального метрического тензора от наблюдаемого трёхмерного метрического тензора $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ и скорости вращения пространства. Поэтому, хотя наблюдаемые компоненты \hbar^{ik} тензора Планка имеют постоянное значение (с разными знаками для левого и правого вращения), его квадрат в общем случае зависит от угловой скорости вращения пространства.

4.2 Спин-импульс частицы в уравнениях движения

Теперь получим выражение для дополнительного импульса S^α , приобретаемого частицей за счёт её спина, исследовав *действие* для частицы со спином. Затем, в следующем параграфе §4.3, мы выведем динамические уравнения движения частицы со спином в псевдоримановом пространстве.

Итак, действие S для частицы, обладающей некоторым внутренним скалярным полем k , с которым взаимодействует некоторое внешнее поле A и за счёт этого взаимодействия перемещает частицу на интервал ds , имеет вид

$$S = \alpha_{(kA)} \int_a^b kA ds, \quad (4.18)$$

где $\alpha_{(kA)}$ скалярная константа, характеризующая свойство частицы в данном взаимодействии и уравнивающая размерности. Если внутреннему скалярному полю частицы k отвечает внешнее поле тензора 1-го ранга A_α , то действие по перемещению частицы этим векторным полем будет иметь вид

$$S = \alpha_{(kA_\alpha)} \int_a^b kA_\alpha dx^\alpha. \quad (4.19)$$

При взаимодействии внутреннего скалярного поля k частицы с внешним полем тензора 2-го ранга $A_{\alpha\beta}$, действие этого поля по перемещению частицы, соответственно, вычисляется по правилу

$$S = \alpha_{(kA_{\alpha\beta})} \int_a^b kA_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (4.20)$$

и так далее. Например, если собственному векторному полю частицы k^α отвечает внешнее векторное поле A_α , то действие по перемещению частицы за счёт этого взаимодействия выглядит так

$$S = \alpha_{(k^\alpha A_\alpha)} \int_a^b k^\alpha A_\alpha ds. \quad (4.21)$$

Кроме того, действие, независимо от характера внутренних свойств частицы и внешнего поля, всегда можно представить как

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (4.22)$$

где L так называемая *функция Лагранжа*, которая также часто называется *лагранжиан*.

Так как размерность действия S [эрг сек = грамм см² сек⁻¹], то лагранжиан имеет размерность энергии [эрг = грамм см² сек⁻²]. Причём производная от функции Лагранжа по трёхмерной координатной скорости частицы $u^i = \frac{dx^i}{dt}$

$$\frac{\partial L}{\partial u^i} = p_i \quad (4.23)$$

есть ковариантная форма её трёхмерного импульса $p^i = cP^i$, по которой можно восстановить выражение для четырёхмерного вектора импульса частицы P^α . Таким образом, записав действие для частицы со спином, выделив функцию Лагранжа и продифференцировав её по координатной скорости частицы, мы можем вычислить дополнительный импульс, получаемый частицей за счёт её спина.

Как известно, действие по перемещению свободной частицы в псевдоримановом пространстве имеет вид*

$$S = \int_a^b m_0 c ds. \quad (4.24)$$

В галилеевой системе отсчёта пространства Минковского, так как перекрёстные члены фундаментального метрического тензора равны нулю, пространственно-временной интервал равен

$$ds = \sqrt{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} = c dt \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}, \quad (4.25)$$

и действие принимает вид

$$S = \int_a^b m_0 c ds = \int_{t_1}^{t_2} m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} dt. \quad (4.26)$$

*В *Теории поля* [10] действие взято со знаком “минус”, тогда как у нас перед интегралом действия и в функции Лагранжа всегда стоит “плюс”. Это обусловлено тем, что знак действия зависит от вида сигнатуры псевдориманова пространства. Ландау и Лифшиц в *Теории поля* используют сигнатуру $(-+++)$, т.е. время у них мнимое, пространственные координаты вещественные и трёхмерный координатный импульс положителен (см. ниже). У нас, как и в работах Зельманова [9, 11–13], сигнатура имеет вид $(+---)$, т.е. время вещественное и пространственные координаты мнимые: в этом случае трёхмерный *наблюдаемый* импульс является положительным.

Таким образом, функция Лагранжа свободной частицы в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского равна

$$L = m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (4.27)$$

Дифференцируя её по координатной скорости, получаем ковариантную форму трёхмерного импульса

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial u^i} = m_0 c^2 \frac{\partial \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\partial u^i} = -\frac{m_0 u_i}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (4.28)$$

Отсюда после поднятия индексов следует, что четырёхмерный вектор импульса свободной частицы имеет вид

$$P^\alpha = \frac{m_0}{c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx^\alpha}{dt} = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (4.29)$$

Так как оба сомножителя m_0 и $\frac{dx^\alpha}{ds}$ в этой формуле общековариантны, т.е. не зависят от выбора конкретной системы отсчёта, то это выражение для четырёхмерного импульса, полученное в галилеевой системе отсчёта, справедливо также и в любой другой произвольной системе отсчёта псевдориманова пространства.

Теперь рассмотрим движение частицы, обладающей внутренней структурой, проявляющейся в экспериментах как её свойство, называемое *спином*. Внутреннему вращению (спину) частицы $n\hbar^{\alpha\beta}$ в четырёхмерном псевдоримановом пространстве отвечает внешнее поле вращения $A_{\alpha\beta}$ самого пространства. Таким образом, общее действие для частицы со спином имеет следующий вид

$$S = \int_a^b (m_0 c ds + \alpha_{(s)} \hbar^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} ds), \quad (4.30)$$

где $\alpha_{(s)}$ [сек см⁻¹] скалярная константа, характеризующая частицу в спин-взаимодействии. Так как в состав константы действия могут входить лишь характеристики свойств частицы и фундаментальные физические константы, очевидно, что $\alpha_{(s)}$ представляет собой спиновое квантовое число n , являющееся функцией внутренних свойств частицы, делённое на скорость света $\alpha_{(s)} = \frac{n}{c}$. Тогда

действие по перемещению частицы, возникающее из-за взаимодействия её спина с полем неголономности пространства $A_{\alpha\beta}$ (4.13) равно

$$S = \alpha_{(s)} \int_a^b \hbar^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} ds = \frac{n}{c} \int_a^b \hbar^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} ds. \quad (4.31)$$

Здесь необходимо отметить, что построить четырёхмерный вектор импульса для частицы со спином тем же способом, как и для свободной частицы, невозможно. Вспомним, что импульс свободной частицы был вначале получен в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского, где выражение ds через интервал координатного времени dt , подставляемое в действие, имеет простой вид (4.25). Было показано, что полученное выражение (4.29), в силу его общековариантности, справедливо для любой системы отсчёта псевдориманова пространства. Однако, как видно из действия для частицы со спином, спин влияет на движение частицы только в неголономном пространстве $A_{\alpha\beta} \neq 0$, т.е. когда не равны нулю перекрёстные члены g_{0i} фундаментального метрического тензора. В галилеевой системе отсчёта, по определению, все перекрёстные члены метрического тензора равны нулю, следовательно, равны нулю скорость вращения пространства $v_i = -c \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$ и тензор неголономности $A_{\alpha\beta}$. Поэтому бессмысленно выводить импульс частицы со спином в галилеевой системе отсчёта пространства Минковского (там он просто равен нулю), нужно выводить его сразу в псевдоримановом пространстве.

В произвольной сопутствующей системе отсчёта псевдориманова пространства интервал ds равен

$$\begin{aligned} ds &= c d\tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \\ &= c dt \left(1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}\right) \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2 \left(1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}\right)^2}}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где координатная скорость частицы $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ выражается через её наблюдаемую скорость $v^i = \frac{dx^i}{d\tau}$ в виде

$$v^i = \frac{u^i}{1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}}, \quad v^2 = \frac{h_{ik} u^i u^k}{\left(1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}\right)^2}. \quad (4.33)$$

Тогда дополнительное действие (4.31) по перемещению частицы, возникающее из-за взаимодействия её спина с полем неголономности пространства, принимает вид

$$S = n \int_{t_1}^{t_2} \hbar^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \sqrt{\left(1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2}} dt. \quad (4.34)$$

Таким образом, функция Лагранжа для действия, вызванного спином частицы, выглядит следующим образом

$$L = n \hbar^{\alpha\beta} A_{\alpha\beta} \sqrt{\left(1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (4.35)$$

Теперь, чтобы получить дополнительный импульс, приобретённый частицей за счёт её спина, нам осталось взять производную от этой функции Лагранжа (4.35) по координатной скорости частицы. Учитывая, что $\hbar^{\alpha\beta}$ как тензор внутреннего вращения частицы и $A_{\alpha\beta}$ (4.13) как тензор собственного вращения пространства не являются функциями скорости перемещения частицы, мы получаем

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial L}{\partial u^i} = n \hbar^{mn} A_{mn} \frac{\partial}{\partial u^i} \sqrt{\left(1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}\right)^2 - \frac{u^2}{c^2}} = \\ &= - \frac{n \hbar^{mn} A_{mn}}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v_i + v_i), \end{aligned} \quad (4.36)$$

где $v_i = h_{ik} v^k$. Сравним выражение (4.36) с пространственной ковариантной компонентой $p_i = c P_i$ четырёхмерного вектора импульса $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ массовой частицы в псевдоримановом пространстве. Для массовой частицы нашего мира, движущейся относительно нас из прошлого в будущее (прямой ход времени), трёхмерный ковариантный импульс имеет вид [19]

$$p_i = c P_i = c g_{i\alpha} P^\alpha = -m (v_i + v_i) = - \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v_i + v_i). \quad (4.37)$$

Отсюда видно, что четырёхмерный вектор импульса S^α , получаемый частицей за счёт её спина (спин-импульс), равен

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2} n \hbar^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (4.38)$$

или, обозначив для простоты записи $\eta_0 = n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = n\hbar^{mn}A_{mn}$

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2} \eta_0 \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (4.39)$$

Тогда суммарный динамический вектор Q^α (4.1), характеризующий движение частицы со спином, равен

$$Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} + \frac{1}{c^2} n\hbar^{\mu\nu}A_{\mu\nu} \frac{dx^\alpha}{ds}. \quad (4.40)$$

Таким образом, частица со спином в неголономном пространстве ($A_{\mu\nu} \neq 0$) действительно приобретает дополнительный импульс, отклоняющий её от геодезической траектории (траектории свободной частицы) и делающий её движение негеодезическим. В отсутствии вращения пространства, т.е. когда пространство является голономным, все величины $A_{\mu\nu} = 0$ и, поэтому, спин частицы никак не влияет на её движение. Спин наиболее сильно влияет на движение частиц в атомной физике, где вращение пространства является особенно сильным.

4.3 Уравнения движения частицы со спином

Динамические уравнения движения частицы со спином геометрически суть уравнения параллельного переноса суммарного вектора $Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha$ (4.40) вдоль траектории её движения в четырёхмерном псевдоримановом пространстве

$$\frac{d}{ds} (P^\alpha + S^\alpha) + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha (P^\mu + S^\mu) \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (4.41)$$

где квадрат переносимого суммарного вектора сохраняется вдоль всей траектории параллельного переноса ($Q_\alpha Q^\alpha = const$).

Х.и.-проекции уравнений параллельного переноса, полученные нами во 2-й главе, имеют вид

$$\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{c} F_i q^i \frac{d\tau}{ds} + \frac{1}{c} D_{ik} q^i \frac{dx^k}{ds} = 0, \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq^i}{ds} + \left(\frac{\varphi}{c} \frac{dx^k}{ds} + q^k \frac{d\tau}{ds} \right) (D_k^i + A_k^i) - \\ - \frac{\varphi}{c} F^i \frac{d\tau}{ds} + \Delta_{mk}^i q^m \frac{dx^k}{ds} = 0, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где, в данном случае, φ проекция суммарного вектора Q^α на время, а q^i его проекция на пространство

$$\varphi = b_\alpha Q^\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} + \frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (4.44)$$

$$q^i = h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i = P^i + S^i. \quad (4.45)$$

Таким образом, выполнение поставленной задачи сводится к вычислению величин φ и q^i , подстановке их в уравнения (4.42, 4.43) и приведению подобных членов. Проекция вектора импульса массовой частицы $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ имеют вид

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m, \quad P^i = \frac{1}{c} m v^i, \quad (4.46)$$

осталось вычислить проекции спин-импульса S^α . Учитывая в формуле для спин-импульса S^α (4.39), что пространственно-временной интервал, выраженный через физически наблюдаемые величины, имеет вид $ds = cd\tau \sqrt{1 - v^2/c^2}$, мы получаем компоненты S^α

$$S^0 = \frac{1}{c^2} \frac{n \hbar^{mn} A_{mn} (v_i v^i \pm c^2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} c^2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)}, \quad (4.47)$$

$$S^i = \frac{1}{c^3} \frac{n \hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} v^i, \quad (4.48)$$

$$S_0 = \pm \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \frac{n \hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.49)$$

$$S_i = -\frac{1}{c^3} \frac{n \hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (v_i \pm v_i), \quad (4.50)$$

также выраженные через физически наблюдаемые величины. Отсюда получаем выражения для физических наблюдаемых проекций спин-импульса частицы. Они имеют вид

$$\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm \frac{1}{c^2} \eta, \quad S^i = \frac{1}{c^3} \eta v^i, \quad (4.51)$$

где η обозначает

$$\eta = \frac{n \hbar^{mn} A_{mn}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.52)$$

а знакопеременность возникает в результате подстановки функции времени $\frac{dt}{d\tau}$ (1.63) и указывает на направление движения частицы в будущее (верхний знак) или в прошлое (нижний знак). Тогда квадрат спин-импульса частицы равен

$$S_\alpha S^\alpha = g_{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta = \frac{1}{c^4} \eta_0^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha dx^\beta}{ds^2} = \frac{1}{c^4} \eta_0^2, \quad (4.53)$$

и квадрат её суммарного динамического вектора Q^α равен

$$Q_\alpha Q^\alpha = g_{\alpha\beta} Q^\alpha Q^\beta = m_0^2 + \frac{2}{c^2} m_0 \eta_0 + \frac{1}{c^4} \eta_0^2. \quad (4.54)$$

Таким образом, квадрат длины суммарного вектора частицы со спином складывается из трёх частей:

- 1) квадрата длины собственного четырёхмерного импульса частицы $P_\alpha P^\alpha = m_0^2$;
- 2) квадрата её четырёхмерного спин-импульса $S_\alpha S^\alpha = \frac{1}{c^4} \eta_0^2$;
- 3) члена $\frac{2}{c^2} m_0 \eta_0$, характеризующего спин-гравитационное взаимодействие.

Для осуществления параллельного переноса (4.41) необходимо, чтобы квадрат переносимого суммарного вектора сохранялся вдоль всего пути переноса. Однако из полученного выражения (4.54) следует, что, так как $m_0 = const$, квадрат суммарного вектора частицы со спином Q^α сохраняется только тогда, когда вдоль её траектории $\eta_0 = const$, т.е.

$$d\eta_0 = \frac{\partial \eta_0}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = 0. \quad (4.55)$$

Поделив обе части этого равенства на $d\tau$, что всегда возможно*, так как элементарный интервал физического времени наблюдателя

*Условие $d\tau = 0$ имеет смысл только в обобщённом пространстве-времени, в котором возможно вырождение четырёхмерного фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Тогда упомянутое условие определяет полностью вырожденную область (нуль-пространство), где существуют нуль-частицы, перемещающиеся мгновенно, т.е. являющиеся носителями дальнего действия.

больше нуля, получаем х.и.-условие постоянства квадрата суммарного вектора частицы со спином

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = \frac{*\partial\eta_0}{\partial t} + v^k \frac{*\partial\eta_0}{\partial x^k} = 0. \quad (4.56)$$

Подставляя сюда $\eta_0 = n\hbar^{mn}A_{mn}$, имеем

$$n\hbar^{mn} \left(\frac{*\partial A_{mn}}{\partial t} + v^k \frac{*\partial A_{mn}}{\partial x^k} \right) = 0. \quad (4.57)$$

Чтобы более наглядно представить себе полученный результат (4.57), мы выразим трёхмерный х.и.-тензор угловой скорости вращения пространства A_{ik} через х.и.-псевдовектор трёхмерной угловой скорости этого вращения

$$\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}, \quad (4.58)$$

который также является хронометрически инвариантной величиной. Далее, умножая Ω^{*i} на ε_{ipq}

$$\Omega^{*i} \varepsilon_{ipq} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} \varepsilon_{ipq} A_{mn} = \frac{1}{2} (\delta_p^m \delta_q^n - \delta_p^n \delta_q^m) A_{mn} = A_{pq}, \quad (4.59)$$

получаем выражение (4.57) в виде

$$\begin{aligned} n\hbar^{mn} \left[\frac{*\partial}{\partial t} (\varepsilon_{imn} \Omega^{*i}) + v^k \frac{*\partial}{\partial x^k} (\varepsilon_{imn} \Omega^{*i}) \right] = \\ = n\hbar^{mn} \varepsilon_{imn} \left[\frac{1}{\sqrt{h}} \frac{*\partial}{\partial t} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) + v^k \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{*\partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) \right] = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Гравитационно-инерциальная сила и тензор неголономности пространства связаны между собой двумя тождествами Зельманова [9, 11–13], одно из которых имеет вид

$$\frac{2}{\sqrt{h}} \frac{*\partial}{\partial t} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) + \varepsilon^{ijk} *\nabla_j F_k = 0, \quad (4.61)$$

или, в другой форме записи

$$\frac{*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2} (*\nabla_k F_i - *\nabla_i F_k) = \frac{*\partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{*\partial F_k}{\partial x^i} - \frac{*\partial F_i}{\partial x^k} \right) = 0, \quad (4.62)$$

где $\varepsilon^{ijk} {}^* \nabla_j F_k$ наблюдаемый х.и.-вихрь поля гравитационно-инерциальной силы F_k . Отсюда видно, что нестационарность тензора угловой скорости вращения пространства A_{ik} обусловлена *вихревым характером* поля гравитационно-инерциальной силы F_i в пространстве тела отсчёта наблюдателя.

С учётом тождества (4.61), наше выражение принимает вид

$$-n\hbar^{mn} {}^* \nabla_m F_n + n\hbar^{mn} \varepsilon_{imn} v^k \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{{}^* \partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) = 0, \quad (4.63)$$

или иначе

$$n\hbar^{mn} {}^* \nabla_m F_n = n\hbar^{mn} \varepsilon_{imn} v^k \left(\Omega^{*i} \frac{{}^* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^k} + \frac{{}^* \partial \Omega^{*i}}{\partial x^k} \right). \quad (4.64)$$

Вспомним, что это выражение — лишь развёрнутая х.и.-запись условия постоянства квадрата суммарного вектора частицы со спином (4.57). Левую часть (4.64) можно представить в виде

$$\pm 2n\hbar ({}^* \nabla_1 F_2 - {}^* \nabla_2 F_1 + {}^* \nabla_1 F_3 - {}^* \nabla_3 F_1 + {}^* \nabla_2 F_3 - {}^* \nabla_3 F_2), \quad (4.65)$$

где знаки “плюс” и “минус” относятся к правой и левой системам координат, соответственно. Таким образом, левая часть выражения (4.64) представляет собой х.и.-вихрь (ротор) гравитационно-инерциальной силы. Правая часть (4.64) зависит от пространственной ориентации поля псевдовектора угловой скорости вращения пространства Ω^{*i} .

Итак, для сохранения квадрата переносимого вектора частицы со спином необходимо, чтобы правая и левая части выражения (4.64) были равны друг другу вдоль всей траектории частицы. В общем случае, т.е. без каких-либо дополнительных предположений о геометрической структуре пространства отсчёта, это происходит при балансе между вихревым полем гравитационно-инерциальной силы пространства и пространственным распределением псевдовектора угловой скорости его вращения. Если же поле гравитационно-инерциальной силы является безвихревым, то вся левая часть условия сохранения переносимого вектора частицы со спином (4.64) равна нулю и это условие принимает вид

$$n\hbar^{mn} \varepsilon_{imn} v^k \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{{}^* \partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) = 0. \quad (4.66)$$

Запишем х.и.-производную как $\frac{*}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{1}{c^2} v_k \frac{*}{\partial t}$. Тогда мы получаем

$$n\hbar^{mn} \varepsilon_{imn} v^k \frac{1}{\sqrt{h}} \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) - \frac{1}{c^2} v_k \frac{*}{\partial t} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) \right] = 0. \quad (4.67)$$

Так как поле силы F_i в данном случае является безвихревым, то, согласно (4.66), второй член в этом выражении равен нулю. Таким образом, квадрат суммарного вектора частицы со спином сохраняется в безвихревом поле гравитационно-инерциальной силы F_i при равенстве нулю не только х.и.-выражения (4.66), но и выражения с простыми производными

$$n\hbar^{mn} \varepsilon_{imn} v^k \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) = 0. \quad (4.68)$$

Для массовых частиц это бывает, например, при $v^k = 0$, т.е. когда частица покоится относительно наблюдателя и его тела отсчёта. Поэтому равенство нулю производных из (4.68) не строго обязательно для массовых частиц. Однако безмассовые частицы пребывают в непрерывном движении со скоростью света, поэтому для них в безвихревом поле силы F_i обязательно должны быть равны нулю производные $\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*i})$ и $\frac{*}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*i})$.

Теперь выведем х.и.-динамические уравнения движения частицы со спином в псевдоримановом пространстве. Подставляя (4.46) и (4.51) в выражения (4.44, 4.45), получаем наблюдаемые компоненты суммарного вектора частицы со спином

$$\varphi = \pm \left(m + \frac{1}{c^2} \eta \right), \quad q^i = \frac{1}{c} m v^i + \frac{1}{c^3} \eta v^i. \quad (4.69)$$

После подстановки этих величин для $\varphi > 0$ в выражения (4.42, 4.43), мы получаем х.и.-уравнения движения для массовой частицы со спином, движущейся из прошлого в будущее

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k = -\frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4} F_i v^i - \frac{\eta}{c^4} D_{ik} v^i v^k, \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m v^i) + 2m (D_k^i + A_k^i) v^k - m F^i + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta v^i) - \frac{2\eta}{c^2} (D_k^i + A_k^i) v^k + \frac{\eta}{c^2} F^i - \frac{\eta}{c^2} \Delta_{nk}^i v^n v^k. \end{aligned} \quad (4.71)$$

Для массовой частицы со спином, движущейся из будущего в прошлое, после подстановки величин (4.69) для $\varphi < 0$, эти уравнения принимают вид

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k = \frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4} F_i v^i - \frac{\eta}{c^4} D_{ik} v^i v^k, \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m v^i) + m F^i + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta v^i) - \frac{\eta}{c^2} F^i - \frac{\eta}{c^2} \Delta_{nk}^i v^n v^k. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Получившиеся уравнения мы скомпоновали таким образом, что слева стоит *геодезическая часть*, характеризующая свободное (геодезическое) движение частицы, а справа сгруппированы члены, вызванные наличием спина частицы и делающие её движение негеодезическим (*негеодезическая часть*). Таким образом, при движении частицы без спина правые части обращаются в нуль, и мы получаем х.и.-динамические уравнения движения свободной частицы. Такой вид уравнений движения позволит нам более наглядно провести их анализ в следующих параграфах.

Безмассовая частица в рамках концепции частица-волна обычно характеризуется четырёхмерным волновым вектором $K^\alpha = \frac{\omega}{c} \frac{dx^\alpha}{d\sigma}$, где $d\sigma^2 = h_{ik} dx^i dx^k$ трёхмерный физически наблюдаемый интервал, не равный нулю вдоль изотропных траекторий. Так как безмассовые частицы движутся вдоль изотропных траекторий (траектория распространения света), то вектор K^α также является изотропным: его квадрат равен нулю. Однако, так как размерность волнового вектора K^α [см^{-1}], то выведенные с его помощью уравнения движения безмассовых частиц имеют размерность, отличную от уравнений движения массовых частиц. Кроме того, это обстоятельство не позволяет построить действие в единой форме для массовых и безмассовых частиц. Вместе с тем спин — физическое свойство, которым обладают как массовые, так и безмассовые частицы (например, фотоны). Поэтому при выводе уравнений движения частицы со спином необходимо использовать единый динамический вектор для обоих типов частиц. Этот вектор можно получить, применив физические условия, выполняющиеся вдоль изотропных траекторий,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = 0, \quad c d\tau = d\sigma \neq 0, \quad (4.74)$$

к четырёхмерному импульсу массовой частицы

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{m}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = m \frac{dx^\alpha}{d\sigma}. \quad (4.75)$$

В результате параметром дифференцирования становится наблюдаемый трёхмерный интервал, не равный нулю вдоль изотропных траекторий, а размерность всего выражения, в отличие от четырёхмерного волнового вектора K^α [см^{-1}], совпадает с размерностью четырёхмерного вектора импульса P^α [грамм]. Причём релятивистская масса m , не равная нулю для безмассовых частиц, вычисляется из её энергетического эквивалента по формуле $E = mc^2$. Например, если энергия фотона равна $E = 1 \text{ МэВ} = 1,6 \times 10^{-6}$ эрг, то его релятивистская масса составляет $m = 1,8 \times 10^{-28}$ грамм.

Таким образом, четырёхмерный вектор импульса (4.75) в зависимости от его формы может характеризовать как движение массовых частиц (неизотропные траектории), так и движение безмассовых частиц (изотропные траектории). Действительно, для безмассовых частиц $m_0 = 0$ и $ds = 0$, поэтому их частное $\frac{0}{0}$ в выражении (4.75) представляет собой неопределённость типа $0/0$. Переход от $\frac{m_0}{ds}$ к $\frac{m}{d\sigma}$ есть раскрытие этой неопределённости, так как релятивистская масса (масса движения) безмассовых частиц $m \neq 0$ и вдоль их траекторий $d\sigma \neq 0$.

Естественно, что в форме, применяемой к безмассовым частицам (т.е. вдоль изотропных траекторий), квадрат четырёхмерного вектора импульса P^α (4.75) равен нулю

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = m^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} \frac{dx^\beta}{d\sigma} = m^2 \frac{ds^2}{d\sigma^2} = 0. \quad (4.76)$$

Физически наблюдаемые компоненты четырёхмерного вектора импульса безмассовых частиц $P^\alpha = m \frac{dx^\alpha}{d\sigma}$ равны

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm m, \quad P^i = \frac{1}{c} m c^i, \quad (4.77)$$

где c^i трёхмерный х.и.-вектор скорости света. В этом случае спин-импульс частицы (4.39) также является изотропным

$$S^\alpha = \frac{1}{c^2} \eta_0 \frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{1}{c^2} \eta \frac{dx^\alpha}{cd\tau} = \frac{1}{c^2} \eta \frac{dx^\alpha}{d\sigma}, \quad (4.78)$$

так как его квадрат равен нулю

$$S_\alpha S^\alpha = g_{\alpha\beta} S^\alpha S^\beta = \frac{1}{c^4} \eta^2 g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha dx^\beta}{d\sigma^2} = \frac{1}{c^4} \eta^2 \frac{ds^2}{d\sigma^2} = 0, \quad (4.79)$$

и, следовательно, квадрат суммарного вектора безмассовой частицы со спином $Q^\alpha = P^\alpha + S^\alpha$ также равен нулю. Наблюдаемые проекции спин-импульса безмассовой частицы имеют вид

$$\frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm \frac{1}{c^2} \eta, \quad S^i = \frac{1}{c^3} \eta c^i, \quad (4.80)$$

где временная проекция совпадает с проекцией для массовых частиц (4.51), а в пространственной проекции вместо произвольной наблюдаемой скорости v^i (4.51) стоит вектор наблюдаемой скорости света c^i . Соответственно, наблюдаемые компоненты суммарного динамического вектора безмассовой частицы со спином

$$\varphi = \pm \left(m + \frac{1}{c^2} \eta \right), \quad q^i = \frac{1}{c} m c^i + \frac{1}{c^3} \eta c^i. \quad (4.81)$$

Подставляя эти значения при $\varphi > 0$ в (4.42, 4.43), получаем х.и.-динамические уравнения движения безмассовой частицы со спином, которая движется из прошлого в будущее,

$$\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i c^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} c^i c^k = -\frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4} F_i c^i - \frac{\eta}{c^4} D_{ik} c^i c^k, \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m c^i) + 2m (D_k^i + A_k^i) c^k - m F^i + m \Delta_{nk}^i c^n c^k = \\ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta c^i) - \frac{2\eta}{c^2} (D_k^i + A_k^i) c^k + \frac{\eta}{c^2} F^i - \frac{\eta}{c^2} \Delta_{nk}^i c^n c^k. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Соответственно, для безмассовой частицы со спином, движущейся из будущего в прошлое, после подстановки значений (4.81) при $\varphi < 0$, уравнения движения принимают вид

$$-\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i c^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} c^i c^k = \frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau} + \frac{\eta}{c^4} F_i c^i - \frac{\eta}{c^4} D_{ik} c^i c^k, \quad (4.84)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m c^i) + m F^i + m \Delta_{nk}^i c^n c^k = \\ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta c^i) - \frac{\eta}{c^2} F^i - \frac{\eta}{c^2} \Delta_{nk}^i c^n c^k. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Что касается нуль-частиц, обитающих в полностью вырожденном пространстве-времени, на сегодняшний день мы не располагаем экспериментальными данными о том, обладают ли они собственным внутренним вращением (спином) или нет.

4.4 Физические условия спин-взаимодействия

Итак, спин (внутренний момент) частицы взаимодействует с внешним полем вращения пространства — полем тензора неголономности $A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} c h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu} \right)$, являющимся функцией ротора четырёхмерного вектора скорости наблюдателя b^α . В электромагнитных явлениях частица взаимодействует тоже с внешним полем тензора 2-го ранга, тензора Максвелла $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$, т.е. ротором четырёхмерного электромагнитного потенциала. Поэтому имеет смысл сравнить наблюдаемые характеристики поля тензора Максвелла $F_{\alpha\beta}$ с их аналогами для поля неголономности $A_{\alpha\beta}$.

В предыдущей главе мы получили, что поле тензора Максвелла имеет две группы наблюдаемых величин, образованных собственно ковариантным тензором $F_{\alpha\beta}$ и дуальным ему псевдотензором $F^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\mu\nu}$, где $E^{\alpha\beta\mu\nu}$ четырёхмерный совершенно антисимметричный дискриминантный тензор, образующий псевдотензоры в четырёхмерном псевдоримановом пространстве,

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{0\cdot}^i}{\sqrt{g_{00}}} &= E^i, & F^{ik} &= H^{ik} \\ \frac{F_{0\cdot}^{*i}}{\sqrt{g_{00}}} &= H^{*i}, & F^{*ik} &= E^{*ik} \end{aligned} \right\}. \quad (4.86)$$

Аналогичные компоненты общековариантного тензора неголономности $A_{\alpha\beta}$ (4.11) и псевдотензора $A^{*\alpha\beta} = \frac{1}{2} E^{\alpha\beta\mu\nu} A_{\mu\nu}$, вычисленные в сопутствующей системе отсчёта, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{A_{0\cdot}^i}{\sqrt{g_{00}}} &= 0, & A^{ik} &= h^{im} h^{kn} A_{mn} \\ \frac{A_{0\cdot}^{*i}}{\sqrt{g_{00}}} &= 0, & A^{*ik} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.87)$$

Сравнивая эти выражения с наблюдаемыми компонентами тензора и псевдотензора Максвелла (4.86), также вычисленными в со-

путствующей системе отсчёта, мы видим, что в случае спин-взаимодействия имеется аналог лишь “магнитной” составляющей поля неголономности $\mathcal{H}^{ik} = A^{ik} = h^{im}h^{kn}A_{mn}$. Аналог “электростатической” составляющей поля неголономности в спин-взаимодействии получается равным нулю $\mathcal{E}^i = \frac{A_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0$. Это неудивительно, так как спин (внутреннее поле вращения) частицы взаимодействует с внешним полем неголономности пространства и оба этих поля созданы движением. Кроме того, для поля неголономности аналог “магнитной” составляющей $\mathcal{H}^{ik} = A^{ik} \neq 0$ не может быть дуальным равной нулю величине $\mathcal{H}^{*i} = \frac{A_0^{*i}}{\sqrt{g_{00}}} = 0$. Аналогия с электромагнитным полем получается неполной. Но абсолютного совпадения и не следовало ожидать, так как тензор неголономности и тензор электромагнитного поля имеют немного разную структуру: тензор Максвелла представляет собой ротор $F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}$, а тензор неголономности является ротором с “добавками” $A^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} c h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial b_\mu}{\partial x^\nu} \right)$. Тем не менее, мы не сомневаемся, что сравнительный анализ этих близких по структуре полей в будущем позволит построить теорию спин-взаимодействия, схожую с теорией электромагнитных явлений.

Неполная аналогия поля неголономности пространства и электромагнитного поля, в частности, приводит ещё вот к чему. Если определить силу спин-взаимодействия так же, как и силу Лоренца $\Phi^\alpha = \frac{e}{c} F_{\sigma}^{\alpha} U^\sigma$, то получившееся выражение $\Phi^\alpha = \frac{\eta_0}{c^2} A_{\sigma}^{\alpha} U^\sigma$ будет включать в себя *не все* члены правых частей уравнений движения частицы со спином. Однако сторонняя сила, действующая на частицу, по определению должна включать в себя все факторы, отклоняющие частицу от геодезической траектории, т.е. все члены в правых частях динамических уравнений движения. Иначе говоря, четырёхмерная сила спин-взаимодействия Φ^α [грамм/сек] определяется общековариантным выражением

$$\Phi^\alpha = \frac{DS^\alpha}{ds} = \frac{dS^\alpha}{ds} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} S^\mu \frac{dx^\nu}{ds}, \quad (4.88)$$

проекция которого на пространство (после деления на c) даёт трёхмерную силу спин-взаимодействия Φ^i [грамм см сек⁻²]

$$\Phi^i = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} (\eta v^i) - \frac{2\eta}{c^2} (D_k^i + A_{k.}^i) v^k + \frac{\eta}{c^2} F^i - \frac{\eta}{c^2} \Delta_{nk}^i v^n v^k. \quad (4.89)$$

Продолжая сопоставление электромагнитного и спин-взаимодействия, по аналогии с инвариантами электромагнитного поля (3.25, 3.26) вычислим инварианты поля неголономности. В сопутствующей системе отсчёта они принимают вид

$$J_1 = A_{\alpha\beta} A^{\alpha\beta} = A_{ik} A^{ik} = \varepsilon_{ikm} \varepsilon^{ikn} \Omega^{*m} \Omega_{*n} = 2 \Omega_{*i} \Omega^{*i}, \quad (4.90)$$

$$J_2 = A_{\alpha\beta} A^{*\alpha\beta} = 0. \quad (4.91)$$

Таким образом, скалярный инвариант $J_1 = 2 \Omega_{*i} \Omega^{*i}$ всегда отличен от нуля, так как в противном случае пространство являлось бы голономным (не вращалось) и, поэтому, спин-взаимодействие отсутствовало бы.

Теперь приступим к исследованию физических условий движения элементарных частиц со спином. На основе определения х.и.-вектора гравитационно-инерциальной силы

$$F_i = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left(\frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = -c^2 \frac{\partial \ln \left(1 - \frac{w}{c^2} \right)}{\partial x^i} - \frac{* \partial v_i}{\partial t} \quad (4.92)$$

выразим тензор неголономности A_{ik} (1.36) через гравитационный потенциал и скорость вращения пространства

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{* \partial v_k}{\partial x^i} - \frac{* \partial v_i}{\partial x^k} \right) + v_i \frac{\partial \ln \sqrt{1 - \frac{w}{c^2}}}{\partial x^k} - v_k \frac{\partial \ln \sqrt{1 - \frac{w}{c^2}}}{\partial x^i}. \quad (4.93)$$

Отсюда видно, что тензор неголономности A_{ik} представляет собой трёхмерный наблюдаемый вихрь линейной скорости вращения пространства с двумя добавочными членами, созданными взаимодействием поля гравитационного потенциала w и поля вращения пространства.

Вместе с тем спин-взаимодействие, из-за малости абсолютного значения постоянной Планка, сказывается лишь на движении элементарных частиц. Причём в масштабах столь малых масс и расстояний, как известно, интенсивность гравитационного взаимодействия на несколько порядков слабее электромагнитного, слабого (спинового) и сильного взаимодействий. Учитывая это обстоятельство, можно считать, что при спин-взаимодействии в выражении для тензора неголономности A_{ik} (4.93) гравитационный потенциал

$w \rightarrow 0$. Тогда в масштабах элементарных частиц A_{ik} представляет собой наблюдаемый вихрь (ротор) в “чистом” виде

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{* \partial v_k}{\partial x^i} - \frac{* \partial v_i}{\partial x^k} \right), \quad (4.94)$$

а в векторе гравитационно-инерциальной силы (4.92) остаётся лишь инерциальная (кориолисова) часть

$$F_i = - \frac{* \partial v_i}{\partial t} = - \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{\partial v_i}{\partial t}. \quad (4.95)$$

Тождества Зельманова [9, 11–13], связывающие гравитационно-инерциальную силу и вращение пространства

$$\frac{2}{\sqrt{h}} \frac{* \partial}{\partial t} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) + \varepsilon^{ijk} * \nabla_j F_k = 0, \quad * \nabla_k \Omega^{*k} + \frac{1}{c^2} F_k \Omega^{*k} = 0, \quad (4.96)$$

для элементарных частиц ($w \rightarrow 0$) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{h} \Omega^{*i}) + \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \left(\frac{* \partial^2 v_k}{\partial x^j \partial t} - \frac{* \partial^2 v_j}{\partial x^k \partial t} \right) = 0 \\ * \nabla_k \Omega^{*k} - \frac{1}{c^2} \frac{* \partial v_k}{\partial t} \Omega^{*k} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.97)$$

Если подставить сюда $\frac{* \partial v_k}{\partial t} = 0$, т.е. предположить, что наблюдаемое вращение пространства является стационарным, то мы получим $* \nabla_k \Omega^{*k} = 0$, т.е. псевдовектор угловой скорости вращения пространства будет сохраняться. Это означает отсутствие “токов” поля вращения. Тогда первое (векторное) тождество примет вид

$$\Omega^{*i} D + \frac{* \partial \Omega^{*i}}{\partial t} = 0, \quad (4.98)$$

откуда следует, что величина $D = \det \| D_n^n \| = \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial t} = 0$, т.е. скорость относительного расширения элементарного объёма пространства равна нулю.

Итак, мы получили, что в масштабе элементарных частиц поле угловых скоростей, с которыми вращается пространство, остаётся неизменным ($* \nabla_k \Omega^{*k} = 0$) и, кроме того, пространство не деформируется ($D = 0$).

Поэтому возможно, что стационарное состояние поля неголономности пространства (внешнего поля при спиновом взаимодействии) является необходимым условием устойчивости элементарных частиц. Отсюда можно сделать вывод, что долгоживущие спиновые частицы обладают устойчивыми внутренними вращениями, а короткоживущие частицы представляют собой неустойчивые пространственные вихри.

Расчёт движений короткоживущих элементарных частиц представляет собой значительные трудности, так как мы не располагаем экспериментальными данными о структуре вихрей, которые могут их породить. В то же время расчёт для долгоживущих элементарных частиц, т.е. в безвихревом внешнем поле вращения пространства (когда вращение пространства является стационарным), позволяет получить точные решения уравнений их движения. Более подробно мы рассмотрим эти вопросы в следующем параграфе.

4.5 Движение элементарных частиц со спином

Как мы уже упоминали, постоянная Планка из-за малости своего абсолютного значения оказывает влияние лишь в масштабах элементарных частиц, когда гравитационное взаимодействие на несколько порядков слабее электромагнитного, слабого и сильного взаимодействий. Поэтому, полагая гравитационный потенциал $w \rightarrow 0$ в уравнениях движения частиц со спином (4.70–4.73) и (4.82–4.85), мы автоматически получаем уравнения движения элементарных частиц.

При этом, как мы выяснили в предыдущем параграфе §4.4, при стационарном вращении пространства $\frac{*dv_k}{dt} = 0$ в масштабах элементарных частиц след тензора скоростей деформации пространства равен нулю $D = 0$. Конечно, из равенства нулю следа какого-либо тензора вовсе не следует, что сам тензор тоже равен нулю. Вместе с тем деформация пространства — явление редкое и в исследованиях движения элементарных частиц мы будем полагать $D_{ik} = 0$.

Кроме того, ранее в §4.3 мы показали, что при стационарном вращении пространства условие сохранения спин-импульса частицы S^α принимает вид (4.68)

$$n\hbar^{mn} \varepsilon_{imn} v^k \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\hbar} \Omega^{*i}) = 0. \quad (4.99)$$

С другой стороны, при $\frac{*dv_k}{dt} = 0$ из тождеств Зельманова (4.97) следует

$$*\nabla_k \Omega^{*k} = \frac{\partial \Omega^{*k}}{\partial x^k} + \frac{\partial \sqrt{h}}{\partial x^k} \Omega^{*k} = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*k}) = 0. \quad (4.100)$$

Первое условие выполняется, когда $\frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{h} \Omega^{*k}) = 0$. Оно имеет место, если псевдовектор угловой скорости вращения пространства имеет вид

$$\Omega^{*i} = \frac{\Omega_{(0)}^{*i}}{\sqrt{h}}, \quad \Omega_{(0)}^{*i} = \text{const}, \quad (4.101)$$

при этом выполняется и второе условие (4.100).

С учётом вышеупомянутых условий, на основе выражений (4.70, 4.71) мы получаем х.и.-уравнения движения для массовой элементарной частицы нашего мира, движущейся относительно обычного наблюдателя в будущее (прямой ход времени)

$$\frac{dm}{d\tau} = -\frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau}, \quad (4.102)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m v^i) + 2m A_k^i v^k + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta v^i) - \frac{2\eta}{c^2} A_k^i v^k - \frac{\eta}{c^2} \Delta_{nk}^i v^n v^k, \end{aligned} \quad (4.103)$$

а из (4.72, 4.73) получаем для массовой элементарной частицы зазеркалья, движущейся в прошлое (обратный ход времени),

$$-\frac{dm}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau}, \quad (4.104)$$

$$\frac{d}{d\tau} (m v^i) + m \Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta v^i) - \frac{\eta}{c^2} \Delta_{nk}^i v^n v^k, \quad (4.105)$$

причём скалярные уравнения движения (временные проекции) получаются одинаковыми как для массовых частиц нашего мира, так и для частиц зазеркалья.

При интегрировании скалярного уравнения движения в случае прямого хода времени (движение из прошлого в будущее)

$$\int_{\tau_1=0}^{\tau_2} \frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) d\tau = 0, \quad (4.106)$$

мы получаем

$$m + \frac{\eta}{c^2} = \text{const} = B, \quad (4.107)$$

где B постоянная интегрирования, значение которой можно определить из начальных условий.

Чтобы понять физический смысл полученного интеграла “живых сил”, проведём аналогию между наблюдаемыми компонентами четырёхмерного вектора импульса частицы $P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$ и четырёхмерного спин-импульса $S^\alpha = \frac{\eta_0}{c^2} \frac{dx^\alpha}{ds}$ (они оба касательны к мировой линии частицы). Их наблюдаемые компоненты имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} &= \pm m, & P^i &= \frac{1}{c} m v^i = \frac{1}{c} p^i \\ \frac{S_0}{\sqrt{g_{00}}} &= \pm \frac{1}{c^2} \eta, & S^i &= \frac{1}{c^3} \eta v^i \end{aligned} \right\}. \quad (4.108)$$

По аналогии с релятивистской массой частицы $\pm m$ назовём величину $\pm \frac{1}{c^2} \eta$ релятивистской *спин-массой*. Тогда $\frac{1}{c^2} \eta_0$ есть спин-масса покоя частицы. Из теоремы живых сил для элементарной частицы со спином (4.107) следует, что (при сделанных предположениях) сумма релятивистской массы частицы и её спин-массы сохраняется вдоль траектории движения.

Теперь, используя интеграл живых сил (решение скалярного уравнения движения), приступим к решению векторных уравнений движения элементарной массовой частицы нашего мира (4.103). Подставляя (4.107) в векторные уравнения движения (4.103), после сокращения на константу получаем

$$\frac{dv^i}{dt} + 2A_k^i v^k + \Delta_{nk}^i v^n v^k = 0, \quad (4.109)$$

т.е. чисто кинематические уравнения движения (в данном случае, негеодезического). Член $\Delta_{nk}^i v^n v^k$, представляющий собой свёртку х.и.-символов Кристоффеля с наблюдаемой скоростью частицы, является пренебрежимо малым, если вдоль траектории частицы наблюдаемая пространственная метрика $h_{ik} = -g_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ близка к евклидовой. Такое возможно, когда скорость вращения пространства много меньше скорости света, а трёхмерная координатная метрика g_{ik} является евклидовой. Тогда диагональные компоненты на-

блюдаемого метрического тензора имеют значения

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = +1, \quad (4.110)$$

а его остальные компоненты $h_{ik} = 0$, если $i \neq k$. Причём четырёхмерная метрика в этом случае не может быть галилеевой из-за того, что трёхмерное пространство вращается относительно времени. Иначе говоря, хотя трёхмерное пространство в данном случае является плоским евклидовым, четырёхмерное пространство-время не является плоским пространством Минковского, а представляет собой псевдориманово пространство с метрикой

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{00} dx^0 dx^0 + 2g_{0i} dx^0 dx^i + g_{ik} dx^i dx^k = \\ &= c^2 dt^2 + 2g_{0i} c dt dx^i - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2. \end{aligned} \quad (4.111)$$

Пусть вращение пространства происходит с постоянной угловой скоростью $\Omega = const$ относительно лишь одной из осей, например, вокруг оси x^3 . Тогда линейная скорость пространства отсчёта $v_i = \Omega_{ik} x^k$ принимает вид

$$v_1 = \Omega_{12} x^2 = \Omega y, \quad v_2 = \Omega_{21} x^1 = -\Omega x, \quad (4.112)$$

где $A_{ik} = \Omega_{ik}$. Тогда очевидно, что у тензора неголономности A_{ik} отличны от нуля только следующие компоненты

$$A_{12} = -A_{21} = -\Omega. \quad (4.113)$$

С учётом этого векторные уравнения движения элементарной частицы нашего мира (4.109) принимают вид

$$\frac{dv^1}{d\tau} + 2\Omega v^2 = 0, \quad \frac{dv^2}{d\tau} - 2\Omega v^1 = 0, \quad \frac{dv^3}{d\tau} = 0. \quad (4.114)$$

Решение третьего уравнения тривиально

$$v^3 = v_{(0)}^3 = const. \quad (4.115)$$

Далее, учитывая, что $v^3 = \frac{dx^3}{d\tau}$, мы записываем координату x^3 в следующем виде

$$x^3 = v_{(0)}^3 \tau + x_{(0)}^3, \quad (4.116)$$

где $x_{(0)}^3$ значение координаты x^3 в начальный момент времени $\tau = 0$. Теперь выразим v^2 из первого уравнения (4.114)

$$v^2 = -\frac{1}{2\Omega} \frac{dv^1}{d\tau}, \quad (4.117)$$

продифференцируем полученное выражение по $d\tau$

$$\frac{dv^2}{d\tau} = -\frac{1}{2\Omega} \frac{d^2v^1}{d\tau^2}, \quad (4.118)$$

и, подставив его во второе уравнение (4.114), получаем

$$\frac{d^2v^1}{d\tau^2} + 4\Omega^2 v^1 = 0, \quad (4.119)$$

т.е. уравнение свободных колебаний. Его решение имеет вид

$$v^1 = C_1 \cos(2\Omega\tau) + C_2 \sin(2\Omega\tau), \quad (4.120)$$

где C_1 и C_2 константы интегрирования, значения которых можно получить из условий в момент $\tau = 0$

$$\left. \begin{aligned} v_{(0)}^1 &= C_1 \\ \frac{dv^1}{d\tau} \Big|_{\tau=0} &= -2\Omega C_1 \sin(2\Omega\tau) \Big|_{\tau=0} + 2\Omega C_2 \cos(2\Omega\tau) \Big|_{\tau=0} \end{aligned} \right\}. \quad (4.121)$$

Таким образом, $C_1 = v_{(0)}^1$, $C_2 = \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega}$, где $\dot{v}_{(0)}^1 = \frac{dv^1}{d\tau} \Big|_{\tau=0}$. Тогда решение уравнения для v^1 принимает окончательный вид

$$v^1 = v_{(0)}^1 \cos(2\Omega\tau) + \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau), \quad (4.122)$$

т.е. скорость элементарной частицы в направлении x^1 испытывает синусоидальные колебания с частотой, равной удвоенной угловой скорости вращения пространства.

Учитывая, что $v^1 = \frac{dx^1}{d\tau}$, проинтегрируем полученное уравнение (4.122) по $d\tau$. В результате получаем

$$x^1 = \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{4\Omega^2} \cos(2\Omega\tau) + C_3. \quad (4.123)$$

Полагая, что в начальный момент $\tau = 0$ величина $x^1 = x_{(0)}^1$, находим постоянную интегрирования $C_3 = x_{(0)}^1 + \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{4\Omega^2}$. Тогда для координаты x^1 элементарной частицы имеем

$$x^1 = \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{4\Omega^2} \cos(2\Omega\tau) + x_{(0)}^1 + \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{4\Omega^2}, \quad (4.124)$$

т.е. координата x^1 элементарной частицы также испытывает свободные колебания с частотой, равной 2Ω .

Теперь, подставляя во второе уравнение движения (4.114) полученную величину v^1 (4.122), находим выражение

$$\frac{dv^2}{d\tau} = 2\Omega v_{(0)}^1 \cos(2\Omega\tau) + \dot{v}_{(0)}^1 \sin(2\Omega\tau), \quad (4.125)$$

интегрирование которого даёт v^2

$$v^2 = v_{(0)}^1 \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + C_4. \quad (4.126)$$

Полагая, что в начальный момент $\tau = 0$ скорость $v^2 = v_{(0)}^2$, находим постоянную интегрирования $C_4 = v_{(0)}^2 + \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega}$. Тогда

$$v^2 = v_{(0)}^1 \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + v_{(0)}^2 + \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega}. \quad (4.127)$$

Учитывая, что $v^2 = \frac{dx^2}{d\tau}$, проинтегрируем это выражение по $d\tau$. В результате получаем выражение для координаты x^2 элементарной частицы

$$x^2 = -\frac{\dot{v}_{(0)}^1}{4\Omega^2} \sin(2\Omega\tau) - \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + v_{(0)}^2 \tau + \frac{\dot{v}_{(0)}^1 \tau}{2\Omega} + C_5. \quad (4.128)$$

Постоянная интегрирования находится из начальных условий $x^2 = x_{(0)}^2$ при $\tau = 0$ и равна $C_5 = x_{(0)}^2 + \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega}$. Тогда окончательно выражение для координаты x^2 принимает вид

$$x^2 = v_{(0)}^2 \tau + \frac{\dot{v}_{(0)}^1 \tau}{2\Omega} - \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{4\Omega^2} \sin(2\Omega\tau) - \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + x_{(0)}^2 + \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega}. \quad (4.129)$$

Из этого выражения следует вывод: если в начальный момент наблюдаемого времени $\tau = 0$ элементарная частица обладала скоростью $v_{(0)}^2$ в направлении x^2 и ускорением $\dot{v}_{(0)}^1$ в направлении x^1 , то эта частица, наряду со свободными колебаниями координаты x^2 с частотой, равной удвоенной угловой скорости вращения пространства Ω , испытывает линейное смещение вдоль оси x^2 на расстояние, равное $\Delta x^2 = v_{(0)}^2 \tau + \frac{\dot{v}_{(0)}^1 \tau^2}{2\Omega}$.

Теперь, возвращаясь к интегралу живых сил (решению скалярного уравнения движения) для элементарной частицы со спином $m + \frac{\eta}{c^2} = B = const$ (4.107), можно вычислить постоянную интегрирования B . Из (4.107), записанного в виде

$$m_0 + \frac{\eta_0}{c^2} = B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (4.130)$$

следует, что квадрат физической наблюдаемой скорости частицы $(v)^2 = const$. Так как компоненты наблюдаемой скорости элементарной частицы уже получены, можно записать выражение для её квадрата, которое из-за того, что рассматриваемая трёхмерная метрика является евклидовой, принимает вид

$$\begin{aligned} (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = \\ = (v_{(0)}^1)^2 + (v_{(0)}^2)^2 + (v_{(0)}^3)^2 + \frac{(\dot{v}_{(0)}^1)^2}{2\Omega^2} + \frac{\dot{v}_{(0)}^1 \dot{v}_{(0)}^2}{\Omega} + \\ + 2 \left(v_{(0)}^2 + \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega} \right) \left(v_{(0)}^1 \sin(2\Omega\tau) - \frac{\dot{v}_{(0)}^1}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) \right). \end{aligned} \quad (4.131)$$

Отсюда видно, что квадрат скорости частицы сохраняется, если $\dot{v}_{(0)}^2 = 0$ и $\dot{v}_{(0)}^1 = 0$. Тогда постоянная интегрирования B из (4.107)

$$B = \frac{m_0 + \frac{\eta_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}, \quad (v_{(0)}^2)^2 = (v_{(0)}^1)^2 + (v_{(0)}^3)^2 = const, \quad (4.132)$$

а собственно интеграл живых сил (4.107) принимает вид

$$m + \frac{\eta}{c^2} = \frac{m_0 + \frac{\eta_0}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}, \quad (4.133)$$

т.е. представляет собой условие сохранения суммы релятивистской массы частицы m и её спин-массы $\frac{\eta}{c^2}$.

Здесь следует сделать одно замечание, касающееся всего сказанного о движении элементарных частиц. Учитывая в выражении $\eta_0 = n \hbar^{mn} A_{mn}$, что $A_{mn} = \varepsilon_{nmk} \Omega^{*k}$, мы получаем

$$\eta_0 = n \hbar^{mn} A_{mn} = 2n \hbar_{*k} \Omega^{*k}, \quad (4.134)$$

где $\hbar_{*k} = \frac{1}{2} \varepsilon_{nmk} \hbar^{mn}$ трёхмерный х.и.-псевдовектор внутреннего момента элементарной частицы. Таким образом, величина η_0 есть скалярное произведение двух трёхмерных наблюдаемых х.и.-псевдовекторов: внутреннего момента частицы \hbar_{*k} и угловой скорости вращения пространства Ω^{*k} . Следовательно, спин-взаимодействие отсутствует, если псевдовекторы внутреннего вращения частицы и взаимодействующего с ним поля внешнего вращения пространства наблюдаются ортогональными.

Теперь вновь вернёмся к уравнениям движения элементарных частиц со спином. С учётом констант интегрирования решения векторных уравнений движения принимают вид

$$\left. \begin{aligned} v^1 &= v_{(0)}^1 \cos(2\Omega\tau), & x^1 &= \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega} \sin(2\Omega\tau) + x_{(0)}^1 \\ v^2 &= v_{(0)}^2 \sin(2\Omega\tau), & x^2 &= -\frac{v_{(0)}^1}{2\Omega} \cos(2\Omega\tau) + \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega} + x_{(0)}^2 \\ v^3 &= v_{(0)}^3, & x^3 &= v_{(0)}^3 \tau + x_{(0)}^3 \end{aligned} \right\}. \quad (4.135)$$

Получим уравнение трёхмерной кривой, по которой движется массовая элементарная частица нашего мира. Пусть начальное смещение частицы равно нулю $x_{(0)}^1 = x_{(0)}^2 = x_{(0)}^3 = 0$. Тогда её трёхмерные координаты в произвольный момент времени будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x = a \sin(2\Omega\tau) \\ x^2 &= y = a [1 - \cos(2\Omega\tau)] \\ x^3 &= z = b\tau \end{aligned} \right\}, \quad (4.136)$$

где $a = \frac{v_{(0)}^1}{2\Omega}$, $b = v_{(0)}^3$. Полученные решения для координат представляют собой параметрические уравнения поверхности, по которой

движется элементарная массовая частица. Чтобы наглядно представить себе эту поверхность, перейдём от параметрической формы записи к координатной, исключив из уравнений параметр τ . Возводя выражения для координат x и y в квадрат, получаем

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2a^2 [1 - \cos(2\Omega\tau)] = \\ &= 4a^2 \sin^2(\Omega\tau) = 4a^2 \sin^2 \frac{z\Omega}{b}. \end{aligned} \quad (4.137)$$

Полученный результат напоминает уравнение винтовой линии $x^2 + y^2 = a^2$, $z = b\tau$, но лишь отчасти. Можно сказать, что частица движется по поверхности цилиндра с постоянной скоростью $b = v_{(0)}^3$ вдоль его оси z , причём радиус этого цилиндра пульсирует с частотой Ω в пределах от нуля (при $z = \frac{\pi kb}{2\Omega}$) до её наибольшего значения $2a = \frac{v_{(0)}^1}{\Omega}$ (при $z = \frac{\pi kb}{2\Omega}$).*

Итак, траектория массовой элементарной частицы нашего мира напоминает винтовую линию, “намотанную” на пульсирующий цилиндр. Время жизни частицы — длина этого цилиндра, отнесённая к её скорости вдоль оси z (оси цилиндра). Пульсации цилиндра — энергетические “вдохи” и “выдохи” частицы. Это означает, что полученный нами цилиндр представляет собой *цилиндр событий* частицы от её рождения в нашем мире (акта материализации) до её смерти (дематериализации). Впрочем, даже после смерти (распада) элементарной частицы цилиндр событий не прекращает своего существования полностью, а лишь *расщепляется* на несколько цилиндров событий других элементарных частиц — продуктов распада (как в нашем мире, так и в зазеркалье).

Поэтому корректное исследование процессов рождения и распада элементарных частиц в общей теории относительности сводится к рассмотрению участков разветвления цилиндров событий с учётом возможных ответвлений, ведущих в зазеркалье.

Если же рассматривать движение двух связанных элементарных частиц со спином, вращающихся вокруг общего центра масс, например, позитрония (гантелеподобной связанной системы из электрона и позитрона), то мы получим двойную спираль наподобие спирали ДНК — закрученную “верёвочную лестницу” со множе-

*Здесь $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Если $v_{(0)}^3 = 0$, то частица просто колеблется в плоскости xy (плоскости сечения цилиндра).

ством перекладинок (связей частиц), навитую на пульсирующий цилиндр событий.

Теперь получим решение уравнений движения массовой элементарной частицы со спином в зазеркалье — мире с обратным ходом времени. При рассматриваемых нами физических условиях (стационарное вращение пространства с малой скоростью, отсутствие деформации и евклидовость трёхмерной метрики), эти уравнения (4.104, 4.105) принимают вид

$$-\frac{dm}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{d\eta}{d\tau}, \quad (4.138)$$

$$\frac{d}{d\tau}(mv^i) = -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau}(\eta v^i). \quad (4.139)$$

Решением скалярного уравнения движения является интеграл живых сил $m + \frac{\eta}{c^2} = B = const$. Подставляя его в векторные уравнения движения (4.139), получаем их решение

$$\frac{dv^i}{d\tau} = 0, \quad (4.140)$$

следовательно $v^i = v_{(0)}^i = const$. Это означает, что с точки зрения обычного наблюдателя элементарные массовые частицы зазеркалья движутся прямолинейно с постоянной скоростью, в отличие от наблюдаемого движения частиц нашего мира, описывающую “винтовую” линию.

Вместе с тем, с точки зрения гипотетического наблюдателя, находящегося в зазеркалье, наоборот, движение частиц нашего мира будет прямолинейным и равномерным, тогда как частицы зазеркалья будут описывать пульсирующие “винтовые” линии.

Таким же образом можно было бы рассчитать и движение безмассовых (светоподобных) элементарных частиц со спином, но мы не знаем, насколько законным в этом случае было бы наше предположение о том, что линейная скорость вращения пространства отсчёта много меньше скорости света. Между тем, именно предположение о малости скорости вращения пространства позволило нам получить точное решение уравнений движения массовых элементарных частиц, хотя методы решения уравнений движения массовых и безмассовых элементарных частиц не отличаются.

4.6 Частица со спином в электромагнитном поле

В этом параграфе мы выведем и исследуем х.и.-динамические уравнения движения частицы, обладающей электрическим зарядом и спином, движущейся во внешнем электромагнитном поле в четырёхмерном псевдоримановом пространстве.

Метод вывода — проецирование на время и на пространство общековариантных уравнений параллельного переноса вдоль четырёхмерной траектории суммарного вектора

$$Q^\alpha = P^\alpha + \frac{e}{c^2} A^\alpha + S^\alpha, \quad (4.141)$$

где P^α четырёхмерный вектор импульса частицы, движущейся в данном случае вдоль негеодезической траектории.

Соответственно, остальные два члена в формуле (4.141) — это четырёхмерный импульс, приобретаемый частицей из-за взаимодействия её заряда с электромагнитным полем, и импульс, приобретаемый частицей за счёт взаимодействия её спина с полем неголономности пространства. Причём, так как векторы P^α и S^α направлены по касательной к четырёхмерной траектории (мировой линии) частицы, мы положим, что третий вектор A^α (четырёхмерный потенциал электромагнитного поля) тоже касателен к мировой линии частицы. В этом случае его структура имеет вид $A^\alpha = \varphi_0 \frac{dx^\alpha}{ds}$, при этом соотношение $q^i = \frac{e}{c} v^i$ (см. §3.8) устанавливает связь между скалярным потенциалом φ и вектор-потенциалом q^i электромагнитного поля.

Тогда физически наблюдаемые компоненты $\tilde{\varphi}$ и \tilde{q}^i суммарного вектора частицы с зарядом и спином, представляющие собой суммы аналогичных компонент всех трёх слагаемых векторов, принимают следующий вид

$$\tilde{\varphi} = \pm \left(m + \frac{e\varphi}{c^2} + \frac{\eta}{c^2} \right), \quad \tilde{q}^i = \frac{1}{c^2} m v^i + \frac{1}{c^3} (\eta + e\varphi) v^i, \quad (4.142)$$

где m релятивистская масса частицы, φ скалярный потенциал электромагнитного поля, а величина η характеризует взаимодействие спина частицы с внешним полем неголономности пространства

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \eta = \frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (4.143)$$

Вообще вывод этих уравнений ничем не отличается от вывода уравнений движения отдельно для заряженной частицы и отдельно для частицы со спином, только сейчас нам предстоит проецировать абсолютную производную суммы трёх векторов. Используя выражения для $\tilde{\varphi}$ и \tilde{q}^i (4.142), получаем х.и.-уравнения движения массовой заряженной частицы со спином, движущейся в нашем мире (из прошлого в будущее)

$$\begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k &= \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta + e\varphi) + \frac{\eta + e\varphi}{c^4} F_i v^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^4} D_{ik} v^i v^k, \end{aligned} \quad (4.144)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m v^i) + 2m (D_k^i + A_k^i) v^k - m F^i + m \Delta_{nk}^i v^n v^k &= \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} [(\eta + e\varphi) v^i] - \frac{2(\eta + e\varphi)}{c^2} (D_k^i + A_k^i) v^k + \\ &\quad + \frac{\eta + e\varphi}{c^2} F^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^2} \Delta_{nk}^i v^n v^k, \end{aligned} \quad (4.145)$$

и уравнения движения массовой частицы с зарядом и спином, движущейся в зазеркалье (т.е. из будущего в прошлое)

$$\begin{aligned} -\frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k &= \\ &= \frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} (\eta + e\varphi) + \frac{\eta + e\varphi}{c^4} F_i v^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^4} D_{ik} v^i v^k, \end{aligned} \quad (4.146)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (m v^i) + m F^i + m \Delta_{nk}^i v^n v^k &= \\ &= -\frac{1}{c^2} \frac{d}{d\tau} [(\eta + e\varphi) v^i] - \frac{\eta + e\varphi}{c^2} F^i - \frac{\eta + e\varphi}{c^2} \Delta_{nk}^i v^n v^k. \end{aligned} \quad (4.147)$$

При параллельном переносе в римановом пространстве длина переносимого вектора сохраняется. Следовательно, его квадрат является инвариантом в любой системе отсчёта. В том числе, в сопутствующей системе отсчёта, где он имеет вид

$$\begin{aligned} Q_\alpha Q^\alpha &= g_{\alpha\beta} \left(P^\alpha + \frac{e}{c^2} A^\alpha + S^\alpha \right) \left(P^\beta + \frac{e}{c^2} A^\beta + S^\beta \right) = \\ &= g_{\alpha\beta} \left(m_0 + \frac{e\varphi_0}{c^2} + \frac{\eta_0}{c^2} \right)^2 \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \left(m_0 + \frac{e\varphi_0}{c^2} + \frac{\eta_0}{c^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.148)$$

В §3.9 мы уже показали, что при ориентации четырёхмерного электромагнитного потенциала A^α вдоль мировой линии частицы правые части х.и.-уравнений движения заряженной частицы существенно упрощаются: правая часть векторных уравнений движения представляет собой х.и.-силу Лоренца $\Phi^i = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right)$, а правая часть скалярного уравнения — скалярное произведение вектора напряжённости электрического поля E_i и х.и.-скорости движения частицы.

Учитывая это, запишем х.и.-уравнения движения массовой заряженной частицы со спином (4.144–4.147) при её движении в нашем мире, т.е. из прошлого в будущее (прямой ход времени),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) F_i v^i + \\ + \frac{1}{c^2} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) D_{ik} v^i v^k = -\frac{e}{c^2} E_i v^i, \end{aligned} \quad (4.149)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^i \right] + 2 \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) (D_k^i + A_k^i) v^k - \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) F^i + \\ + \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) \Delta_{nk}^i v^n v^k = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right), \end{aligned} \quad (4.150)$$

и при её движении в зазеркалье, из будущего в прошлое (обратный ход времени)

$$\begin{aligned} -\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) F_i v^i + \\ + \frac{1}{c^2} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) D_{ik} v^i v^k = -\frac{e}{c^2} E_i v^i, \end{aligned} \quad (4.151)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^i \right] + \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) F^i + \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) \Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -e \left(E^i + \frac{1}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m} \right). \end{aligned} \quad (4.152)$$

Теперь, чтобы получить конкретные выводы о движении элементарных частиц с электрическим зарядом и спином в псевдоримановом пространстве, нам необходимо задать конкретную геометрическую структуру этого пространства. Как и в предыдущем параграфе, где мы исследовали движение незаряженных элементарных частиц, будем полагать, что:

- 1) гравитационное взаимодействие в масштабах элементарных частиц пренебрежимо мало, т.е. потенциал $w \rightarrow 0$;
- 2) пространство вращается стационарно, т.е. $\frac{*dv_k}{dt} = 0$;
- 3) пространство не деформируется, т.е. $D_{ik} = 0$;
- 4) трёхмерная координатная метрика $g_{ik} dx^i dx^k$ является евклидовой, т.е. $g_{ik} = \begin{cases} -1, & i=k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$
- 5) пространство вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси $x^3 = z$, т.е. компоненты линейной скорости вращения равны $v_1 = \Omega_{12} x^2 = \Omega y$, $v_2 = \Omega_{21} x^1 = -\Omega x$.

С учётом этих ограничений метрика в масштабах элементарных частиц принимает вид

$$ds^2 = c^2 dt^2 - 2\Omega y dt dx + 2\Omega x dt dy - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad (4.153)$$

а характеристики пространства с такой метрикой таковы

$$F_i = 0, \quad D_{ik} = 0, \quad A_{12} = -A_{21} = -\Omega, \quad A_{23} = A_{31} = 0. \quad (4.154)$$

Как и в §4.5, мы считаем, что скорость вращения пространства много меньше скорости света (слабое поле неголономности). В таком случае наблюдаемая трёхмерная метрика h_{ik} является евклидовой и все символы Кристоффеля Δ_{jk}^i обращаются в нуль. Тогда х.и.-уравнения движения массовой частицы с зарядом и спином принимают вид (покомпонентно) для частицы нашего мира

$$\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = -\frac{e}{c^2} E_i \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (4.155)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^1}{d\tau} + 2 \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) \Omega v^2 &= \\ &= -e \left(E^1 + \frac{1}{c} \varepsilon^{1km} v_k H_{*m} \right) \\ \frac{d \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^2}{d\tau} - 2 \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) \Omega v^1 &= \\ &= -e \left(E^2 + \frac{1}{c} \varepsilon^{2km} v_k H_{*m} \right) \\ \frac{d \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^3}{d\tau} &= -e \left(E^3 + \frac{1}{c} \varepsilon^{3km} v_k H_{*m} \right) \end{aligned} \right\}, \quad (4.156)$$

и для аналогичной частицы в зазеркалье

$$\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = \frac{e}{c^2} E_i \frac{dx^i}{d\tau}, \quad (4.157)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^1}{d\tau} &= -e \left(E^1 + \frac{1}{c} \varepsilon^{1km} v_k H_{*m} \right) \\ \frac{d \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^2}{d\tau} &= -e \left(E^2 + \frac{1}{c} \varepsilon^{2km} v_k H_{*m} \right) \\ \frac{d \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^3}{d\tau} &= -e \left(E^3 + \frac{1}{c} \varepsilon^{3km} v_k H_{*m} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.158)$$

Из скалярного уравнения движения, как в нашем мире (4.155), так и в зазеркалье (4.157), следует, что сумма релятивистской массы элементарной частицы и её спин-массы (характеристики спин-взаимодействия с полем неголономности) равняется работе электрического поля по перемещению данной заряженной частицы на участке dx^i . Из векторных уравнений движения следует, что, как в нашем мире (4.156), так и в зазеркалье (4.158), сумма трёхмерных импульса частицы и спин-импульса в направлении оси $x^3 = z$ определяется лишь компонентой силы Лоренца вдоль этой оси.

Теперь наша задача состоит в том, чтобы вычислить траекторию элементарной частицы с зарядом и спином в конкретном электромагнитном поле с заданными характеристиками. Так же, как в 3-й главе, будем считать электромагнитное поле постоянным, т.е. не зависящим от времени. Тогда напряжённости E_i и H^{*i} равны

$$E_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \quad (4.159)$$

$$H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn} = \frac{1}{2c} \varepsilon^{imn} \left[\frac{\partial (\varphi v_m)}{\partial x^n} - \frac{\partial (\varphi v_n)}{\partial x^m} - 2\varphi A_{mn} \right]. \quad (4.160)$$

В 3-й главе нами была рассмотрена схожая задача — движение заряженной массовой частицы в стационарных полях, но без учёта спина. Поэтому естественно, что в частном случае, когда спин частицы равен нулю, решения уравнений заряженной частицы со спином, как более общие, должны совпадать с результатами, полученными в 3-й главе рамках “чистой” электродинамики.

При этом, чтобы сравнить наши расчёты с результатами, которые даёт электродинамика, было бы целесообразно исследовать движение массовой элементарной частицы с зарядом и спином в стационарных полях трёх характерных типов, рассмотренных нами в 3-й главе, а также в книге Ландау и Лифшица *Теория поля*: 1) однородное электрическое поле (магнитная составляющая поля отсутствует); 2) однородное магнитное поле (электрическая составляющая поля отсутствует); 3) однородные электрическое и магнитное поля.

Вместе с тем в электродинамике рассматривается движение обычных (не элементарных) частиц, и ещё не факт, что все три рассмотренных там случая могут быть применены при ограничениях на метрику, характерных для масштабов микромира. И мы сейчас объясним, почему это происходит. Во-первых, спин частицы влияет на её движение лишь в том случае, если существует внешнее поле неголономности (вращения) пространства, следовательно, тензор неголономности $A_{ik} \neq 0$. А из выражений для электрической и магнитной напряжённостей E_i и H^{*i} (4.159, 4.160) видно, что неголономность пространства влияет лишь на напряжённость магнитного поля. Таким образом, в основном нас будет интересовать движение элементарной частицы в магнитном поле.

Во-вторых, скалярное уравнение движения массовой заряженной частицы с зарядом и спином (4.155)

$$\left(m_0 + \frac{\eta_0}{c^2}\right) \frac{d}{d\tau} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -\frac{e}{c^2} E_i v^i \quad (4.161)$$

в нерелятивистском случае, когда скорость частицы много меньше скорости света, принимает вид

$$E_i v^i = 0, \quad (4.162)$$

т.е. электрическое поле *не совершает работы* по перемещению заряженной частицы при используемых нами ограничениях на метрику, характерных для масштабов элементарных частиц. Так как мы рассматриваем стационарное поле, то полученное условие (4.162) можно записать следующим образом

$$E_i v^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} v^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0, \quad (4.163)$$

откуда следует, что скалярный потенциал поля постоянен ($\varphi = const$) и магнитная напряжённость имеет вид

$$H^{*i} = \frac{\varphi}{2c} \varepsilon^{imn} \left[\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m} - 2 \left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right) \right]. \quad (4.164)$$

Электрическое поле совершает работу по перемещению релятивистской заряженной элементарной частицы, если абсолютная величина её скорости не является стационарной

$$\frac{1}{2c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} \left(m_0 + \frac{\eta_0}{c^2} \right) \frac{dv^2}{d\tau} = -\frac{e}{c^2} E_i v^i \neq 0. \quad (4.165)$$

Таким образом, электрическая составляющая поля, при заданных ограничениях на метрику, характерных в масштабах элементарных частиц, проявляется лишь для релятивистских частиц, величина скорости которых не постоянна вдоль траектории. Тем самым из рассмотрения в электрическом поле выпадают все “медленные” элементарные частицы.

Поэтому общий случай, т.е. движение элементарной частицы с произвольной (как малой, так и релятивистской) скоростью имеет смысл рассматривать в стационарном *магнитном поле* (когда электрическая составляющая отсутствует).

4.7 Частица со спином в стационарном магнитном поле

Исследуем движение заряженной частицы со спином в стационарном однородном магнитном поле. При этом, как и в предыдущем параграфе, будем считать, что пространство-время имеет метрику вида (4.153). В этом случае $F_i = 0$ и $D_{ik} = 0$. Поле неголономности является стационарным. При вращении относительно оси z из всех компонент тензора неголономности пространства отличны от нуля только компоненты $A_{12} = -A_{21} = -\Omega = const$, т.е. пространство вращается в плоскости xy с постоянной угловой скоростью Ω .

В рассматриваемых условиях величина $\eta_0 = n\hbar^{mn} A_{mn}$, характеризующая взаимодействие спина (внутреннего вращения) частицы с внешним полем неголономности (вращения) самого пространства, имеет следующий вид

$$\eta_0 = n \left(\hbar^{12} A_{12} + \hbar^{21} A_{21} \right) = 2n\hbar^{12} A_{12} = \pm 2n\hbar\Omega, \quad (4.166)$$

где “плюс” обозначает сонаправленные \hbar и Ω (при $A_{12} = -\Omega$ численное значение \hbar^{12} также отрицательно, $\hbar^{12} = -\hbar$), а “минус” означает, что они противоположно направлены (при $A_{12} = +\Omega$ численное значение \hbar^{12} положительно, $\hbar^{12} = +\hbar$).

Уравнения движения заряженной частицы со спином принимают следующий вид (при ориентации потенциала A^α вдоль мировой линии частицы): для частицы нашего мира

$$\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = 0, \quad (4.167)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^i \right] + 2 \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) A_{k^i}^i v^k + \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) \Delta_{nk}^i v^n v^k = \\ = -\frac{e}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}, \end{aligned} \quad (4.168)$$

и для аналогичной частицы в зазеркалье

$$-\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = 0, \quad (4.169)$$

$$\frac{d}{d\tau} \left[\left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) v^i \right] + \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) \Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{e}{c} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}. \quad (4.170)$$

Интегрируя теорему живых сил (скалярное уравнение), получаем интеграл живых сил. В нашем мире и в зазеркалье, соответственно, он имеет вид

$$m + \frac{\eta}{c^2} = B = const, \quad m + \frac{\eta}{c^2} = -\widetilde{B} = const, \quad (4.171)$$

где B постоянная интегрирования в нашем мире и \widetilde{B} в зазеркалье. Вычислим эти константы, подставив в (4.171) начальные условия в момент $\tau = 0$. В результате получаем

$$B = m_0 + \frac{\eta_0}{c^2} = m_0 + \frac{n\hbar^{mn} A_{mn}}{c^2}, \quad (4.172)$$

$$\widetilde{B} = -m_0 - \frac{\eta_0}{c^2} = -m_0 - \frac{n\hbar^{mn} A_{mn}}{c^2}. \quad (4.173)$$

Из интегралов живых сил в стационарном однородном магнитном поле (4.171) следует, что в отсутствии электрической составляющей электромагнитного поля квадрат скорости заряженной частицы со спином сохраняется $v^2 = h_{ik} v^i v^k = const$.

Подставляя выражения для интегралов живых сил в выражения (4.168, 4.170), получаем векторные уравнения движения в нашем мире и в зазеркалье, соответственно,

$$\frac{dv^i}{d\tau} + 2A_k^i v^k + \Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{e}{cB} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}, \quad (4.174)$$

$$\frac{dv^i}{d\tau} + \Delta_{nk}^i v^n v^k = -\frac{e}{cB} \varepsilon^{ikm} v_k H_{*m}. \quad (4.175)$$

Они аналогичны уравнениям движения заряженной частицы без спина в стационарном однородном магнитном поле (3.290, 3.291) с той лишь поправкой, что в данном случае константа интегрирования интеграла живых сил, стоящая в знаменателе правой части, равна не релятивистской массе m , как в электродинамике (3.290, 3.291), а выражению (4.171), которое учитывает взаимодействие спина частицы с полем неголономности пространства. То же самое и с покомпонентной записью векторных уравнений (3.298, 3.299).

Для тех, кто интересуется подробностями метода хронометрических инвариантов, отметим один момент, касающийся покомпонентной записи уравнений движения. При вычислении компонент члена $A_k^i v^k$, присутствующих только в уравнениях движения в нашем мире, получается, например, для $i = 1$

$$A_k^1 v^k = A_1^1 v^1 + A_2^1 v^2 = h^{12} A_{12} v^1 + h^{11} A_{21} v^2, \quad (4.176)$$

где $A_{12} = -A_{21} = -\Omega$. Тогда, вычисляя A_1^1 и A_2^1 , имеем

$$A_1^1 = h^{1m} A_{1m} = h^{11} A_{11} + h^{12} A_{12} = h^{12} A_{12}, \quad (4.177)$$

$$A_2^1 = h^{1m} A_{2m} = h^{11} A_{21} + h^{12} A_{22} = h^{11} A_{21}, \quad (4.178)$$

где h^{ik} суть элементы матрицы, обратной матрице h_{ik}

$$h^{11} = \frac{h_{22}}{h}, \quad h^{12} = -\frac{h_{12}}{h}. \quad (4.179)$$

Тогда, так как определитель трёхмерного наблюдаемого метрического тензора (см. §3.12) имеет вид

$$h = \det \|h_{ik}\| = 1 + \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{c^2}, \quad (4.180)$$

искомая величина $A_k^{-1}v^k$ (4.176) составляет

$$A_k^{-1}v^k = \frac{\Omega}{h} \left[\frac{\Omega^2}{c^2} xy\dot{x} + \left(1 + \frac{\Omega^2 x^2}{c^2} \right) \dot{y} \right]. \quad (4.181)$$

Аналогично вычисляется и компонента $A_k^{-2}v^k$, входящая в уравнение движения вдоль оси y .

Теперь вернёмся к векторным уравнениям движения заряженной частицы со спином в стационарном однородном магнитном поле. Будем решать их для двух возможных случаев взаимной ориентации магнитного поля и поля неголономности.

4.7.1 Магнитное поле сонаправлено с полем неголономности пространства

Пусть поле неголономности направлено вдоль оси z и является слабым. В этом случае векторные уравнения движения массовой частицы с зарядом и спином (покомпонентно) принимают следующий вид: для частицы нашего мира

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = -\frac{eH}{cB}\dot{y}, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = -\frac{eH}{cB}\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0, \quad (4.182)$$

и для частицы зазеркалья

$$\ddot{x} = -\frac{eH}{cB}\dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{eH}{cB}\dot{x}, \quad \ddot{z} = 0. \quad (4.183)$$

Они также отличаются от уравнений движения заряженной частицы без спина в стационарном однородном магнитном поле, сонаправленном слабому полю неголономности (3.104, 3.305), лишь тем, что здесь в знаменателе правой части вместо релятивистской массы частицы стоит константа интегрирования интеграла живых сил, учитывающая взаимодействие спина частицы с полем неголономности пространства.

Используя готовые решения для заряженной частицы в электромагнитном поле из §3.12, мы сразу получаем выражения для координат x и y заряженной частицы со спином в нашем мире

$$x = -[\dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau + \dot{x}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau] \times \\ \times \frac{1}{2\Omega + \omega} + x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{2\Omega + \omega}, \quad (4.184)$$

$$y = [\dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau - \dot{x}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau] \times \\ \times \frac{1}{2\Omega + \omega} + y_{(0)} - \frac{\dot{x}_{(0)}}{2\Omega + \omega}, \quad (4.185)$$

и в зазеркалье

$$x = -\frac{1}{\omega} [\dot{y}_{(0)} \cos \omega\tau + \dot{x}_{(0)} \sin \omega\tau] + x_{(0)} + \frac{\dot{y}_{(0)}}{\omega}, \quad (4.186)$$

$$y = \frac{1}{\omega} [\dot{y}_{(0)} \sin \omega\tau - \dot{x}_{(0)} \cos \omega\tau] + y_{(0)} - \frac{\dot{x}_{(0)}}{\omega}, \quad (4.187)$$

отличающиеся от решений для заряженной частицы в электродинамике тем, что здесь частота ω учитывает взаимодействие спина с полем неголономности пространства.

Массы частиц нашего мира положительны, следовательно, в нашем мире частота ω выражается следующим образом

$$\omega = \frac{eH}{mc + \frac{\eta}{c}} = \frac{eH \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}{m_0c + \frac{\eta_0}{c}} = \frac{eH \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}{m_0c \pm \frac{2\hbar\Omega}{c}}, \quad (4.188)$$

где переменный знак в знаменателе зависит только от взаимной ориентации \hbar и Ω : знак “плюс” имеет место, если \hbar и Ω сонаправлены (знак их скалярного произведения положителен), а “минус” — если они противоположно направлены (в этом случае их скалярное произведение принимает отрицательный знак), независимо от выбора правой или левой системы координат. Подробности см. в комментарии к формуле (4.166).

Массы частиц, обитающих в зазеркалье, имеют строго отрицательные значения (4.143)

$$m = -\frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} < 0, \quad \eta = -\frac{\eta_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} < 0, \quad (4.189)$$

таким образом, в зазеркалье частота ω составляет

$$\omega = \frac{eH}{mc + \frac{\eta}{c}} = \frac{eH \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}{-m_0c - \frac{\eta_0}{c}} = \frac{eH \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}{-m_0c \mp \frac{2\hbar\Omega}{c}}. \quad (4.190)$$

При этом в полученных выражениях для координат (4.184–4.187) уже учтено, что квадрат скорости частицы в нашем мире и в зазеркалье (соответственно) является постоянным

$$\dot{x}_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \omega} = 0, \quad \dot{x}_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{\omega} = 0, \quad (4.191)$$

что вытекает из интеграла живых сил (§3.12). Решение третьего уравнения движения (вдоль оси z) имеет простой вид

$$z = \dot{z}_{(0)}\tau + z_{(0)}. \quad (4.192)$$

Из полученных выражений для координат (4.184–4.187) видно: заряженная массовая частица со спином в стационарном однородном магнитном поле, параллельном слабому полю неголономности, совершает *гармонические колебания* в направлениях x и y . Частота этих колебаний в нашем мире равна

$$\tilde{\omega} = 2\Omega + \omega = 2\Omega + \frac{eH}{m_0c \pm \frac{2n\hbar\Omega}{c}} \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}. \quad (4.193)$$

В зазеркалье частица совершает аналогичные колебания с частотой ω , приведённой в выражении (4.190).

В слабом поле неголономности величина $n\hbar\Omega$ много меньше энергии m_0c^2 и, так как для малых величин $\frac{1}{1 \pm \alpha} \cong 1 \mp \alpha$, мы имеем

$$\tilde{\omega} \cong 2\Omega + \frac{eH}{m_0c} \left(1 \mp \frac{2n\hbar\Omega}{m_0c^2} \right). \quad (4.194)$$

Если в начальный момент смещение и скорость частицы нашего мира удовлетворяют условиям

$$x_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \omega} = 0, \quad y_{(0)} - \frac{\dot{x}_0}{2\Omega + \omega} = 0, \quad (4.195)$$

она будет двигаться, как и заряженная частица без спина, в плоскости xu по *окружности**

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{(2\Omega + \omega)^2}, \quad (4.196)$$

*При этом мы выбираем ось y вдоль начального импульса частицы, что всегда можно сделать. Тогда в выражениях для координат начальная скорость частицы вдоль оси x будет равной нулю.

только её радиус, равный

$$r = \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \omega} = \frac{\dot{y}_0}{2\Omega + \frac{eH}{m_0 c \pm \frac{2n\hbar\Omega}{c}} \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}, \quad (4.197)$$

в данном случае зависит от величины спина частицы и его направления по отношению к полю неголономности пространства.

Если начальная скорость заряженной частицы со спином в направлении магнитного поля (вдоль оси z) отлична от нуля, то она движется вдоль линий напряжённости магнитного поля по *винтовой линии* с тем же радиусом r (4.197).

Частица зазеркалья, если в начальный момент её смещение и скорость удовлетворяют условиям

$$x_{(0)} + \frac{\dot{y}_0}{\omega} = 0, \quad y_{(0)} - \frac{\dot{x}_0}{\omega} = 0, \quad (4.198)$$

также будет двигаться по окружности

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{y}_0^2}{\omega^2}, \quad (4.199)$$

радиус которой равен

$$r = \frac{\dot{y}_0}{\omega} = \frac{\dot{y}_0}{\frac{eH}{-m_0 c \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}} \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}. \quad (4.200)$$

В общем случае, т.е. без дополнительных условий (4.195, 4.198), траектория заряженной частицы со спином в плоскости xy отличается от окружности.

Теперь вычислим общую энергию и импульс заряженной частицы со спином в магнитном поле. Используя выражения для интегралов живых сил, находим, что величина η_0 в данном случае равна $\eta_0 = n\hbar^{mn} A_{mn} = n(\hbar^{12} A_{12} + \hbar^{21} A_{21}) = \pm 2n\hbar\Omega$. Подробности см. в комментарии к формуле (4.166). Тогда для массовой частицы нашего мира мы получаем

$$E_{\text{tot}} = Bc^2 = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{\sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} = \text{const}, \quad (4.201)$$

а для массовой частицы зазеркалья

$$E_{\text{tot}} = \widetilde{B}c^2 = \frac{-m_0c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{\sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} = \text{const}. \quad (4.202)$$

Так как в данной задаче электрическая компонента поля отсутствует, электромагнитное поле не вносит вклад в общую энергию частицы (магнитное поле, как известно, не совершает работу по перемещению электрического заряда).

Из полученных выражений (4.201, 4.202) видно: полная энергия частицы со спином является постоянной, а её величина зависит от взаимной ориентации внутреннего момента частицы \hbar и угловой скорости вращения пространства Ω .

Последнее требует некоторых пояснений. По определению, скалярная величина n (т.е. абсолютное значение спина частицы в единицах \hbar) имеет строго положительный знак, тогда как \hbar и Ω суть численные значения компонент двух антисимметричных тензоров h^{ik} и Ω_{ik} ; каждый из этих тензоров принимает противоположные значения в правой и левой системах координат. Но, так как мы рассматриваем произведения этих величин, имеет значение лишь их взаимная направленность, не зависящая от выбора правой или левой системы координат.

Если \hbar и Ω сонаправлены (их скалярное произведение положительно), то полная энергия частицы нашего мира E_{tot} (4.201) есть сумма её релятивистской энергии $E = mc^2$ и её “спин-энергии”

$$E_s = \frac{2n\hbar\Omega}{\sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}}, \quad (4.203)$$

т.е. полная энергия частицы больше, чем $E = mc^2$.

Если \hbar и Ω направлены в противоположные стороны, то E_{tot} есть разность между релятивистской энергией и спин-энергией частицы. Эта взаимная ориентация допускает особый случай, когда $m_0c^2 = 2n\hbar\Omega$ и, следовательно, полная энергия частицы становится равной нулю (этот случай мы рассмотрим в §4.8).

Для заряженных спиновых частиц с отрицательными массами, населяющих зеркальный мир, полная энергия E_{tot} (4.202) отрица-

тельна, но её абсолютная величина также больше релятивистской энергии $E = -mc^2$ при условии, что \hbar и Ω являются сонаправленными.

Выражение для полного трёхмерного импульса частицы с зарядом и спином в магнитном поле нашего мира имеет вид

$$p_{\text{tot}}^i = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} v^i = m v^i \pm \frac{2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} v^i, \quad (4.204)$$

т.е. представляет собой алгебраическую сумму релятивистского наблюдаемого импульса $p^i = m v^i$ и спин-импульса, сообщаемого частице со спином полем неголономности пространства. Полный импульс частицы со спином превышает релятивистский импульс, если \hbar и Ω сонаправлены, и, наоборот, уменьшаются, если \hbar и Ω противоположно направлены.

В случае противоположной направленности \hbar и Ω полный импульс частицы со спином обращается в нуль (как и её полная энергия), если выполняется условие $m_0 c^2 = 2n\hbar\Omega$.

Для частицы зазеркалья в магнитном поле, соответственно, трёхмерный импульс имеет вид

$$p_{\text{tot}}^i = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} v^i = -m v^i \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} v^i, \quad (4.205)$$

т.е. частица движется быстрее, если \hbar и Ω сонаправлены, и медленнее, если они направлены в противоположные стороны. Компоненты скорости заряженной частицы со спином в магнитном поле, сонаправленным с полем неголономности, с учётом условий (4.191), имеют вид в нашем мире

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau - \dot{x}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau, \quad (4.206)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau + \dot{x}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau, \quad (4.207)$$

и в зазеркалье

$$\dot{x} = \dot{y}_{(0)} \sin \omega\tau - \dot{x}_{(0)} \cos \omega\tau, \quad (4.208)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)} \cos \omega\tau + \dot{x}_{(0)} \sin \omega\tau. \quad (4.209)$$

Тогда компоненты полного импульса частицы имеют следующий вид (начальный импульс в плоскости $xу$ мы полагаем направленным вдоль оси y): в нашем мире

$$p_{\text{tot}}^1 = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{y}_{(0)} \sin(2\Omega + \omega)\tau, \quad (4.210)$$

$$p_{\text{tot}}^2 = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{y}_{(0)} \cos(2\Omega + \omega)\tau, \quad (4.211)$$

$$p_{\text{tot}}^3 = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{z}_{(0)}, \quad (4.212)$$

где частота ω имеет вид (4.188), и в зазеркалье

$$p_{\text{tot}}^1 = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{y}_{(0)} \sin \omega\tau, \quad (4.213)$$

$$p_{\text{tot}}^2 = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{y}_{(0)} \cos \omega\tau, \quad (4.214)$$

$$p_{\text{tot}}^3 = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{z}_{(0)}, \quad (4.215)$$

где ω равна (4.190). При этом, хотя напряжённость магнитного поля не входит в выражение для полной энергии частицы E_{tot} , тем не менее она проявляется в выражении для полного импульса, так как входит в частоту ω (4.190).

4.7.2 Магнитное поле ортогонально полю неголономности пространства

Теперь рассмотрим движение массовой заряженной частицы со спином в магнитном поле, ортогональном полю неголономности

пространства. Естественно, как и раньше, речь идёт о стационарном и однородном магнитном поле.

Итак, поле неголономности направлено вдоль оси z и является слабым. Магнитное поле направлено вдоль оси y . Тогда, как нетрудно убедиться, векторные уравнения движения частицы со спином будут аналогичны уравнениям для бесспиновой частицы, полученным для рассматриваемой конфигурации полей для нашего мира (3.338), и примут вид

$$\ddot{x} + 2\Omega\dot{y} = \frac{eH}{cB}\dot{z}, \quad \ddot{y} - 2\Omega\dot{x} = 0, \quad \ddot{z} = -\frac{eH}{cB}\dot{x}. \quad (4.216)$$

Отличие от (3.338) лишь в том, что здесь знаменатель правой части вместо релятивистской массы частицы содержит константу интегрирования интеграла живых сил, учитывающую взаимодействие спина частицы с полем неголономности. После интегрирования получаем решения

$$x = \frac{\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}\tau - \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2} \cos \tilde{\omega}\tau + x_{(0)} + \frac{\dot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}^2}, \quad (4.217)$$

$$y = -\frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \left(\dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}\tau \right) + \dot{y}_{(0)}\tau + \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \dot{x}_{(0)}\tau + y_{(0)} + \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \dot{x}_{(0)}, \quad (4.218)$$

$$z = \frac{\omega}{\tilde{\omega}^2} \left(\dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega}\tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}\tau \right) + \dot{z}_{(0)}\tau - \frac{\omega}{\tilde{\omega}^2} \ddot{x}_{(0)}\tau + z_{(0)} - \frac{\omega}{\tilde{\omega}^2} \dot{x}_{(0)}, \quad (4.219)$$

отличающиеся от соответствующих решений для бесспиновой частицы тем, что частота $\tilde{\omega}$ в данном случае зависит от спина частицы и его взаимной ориентации с полем неголономности

$$\tilde{\omega} = \sqrt{4\Omega^2 + \omega^2} = \sqrt{4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2 \left(1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}\right)^2}{\left(m_0 c^2 \pm \frac{2n\hbar\Omega}{c}\right)^2}}. \quad (4.220)$$

Соответственно, уравнение траектории частицы со спином аналогично уравнению траектории бесспиновой частицы. В данном

случае, т.е. при определённых начальных условиях, уравнение её траектории представляет собой уравнение *сферы*

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\omega^2} \dot{x}_{(0)}^2, \quad (4.221)$$

радиус которой, в отличие от радиуса траектории бесспиновой частицы, зависит от спина частицы и его ориентации относительно поля неголономности пространства

$$r = \frac{1}{\sqrt{4\Omega^2 + \frac{e^2 H^2 \left(1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}\right)^2}{\left(m_0 c^2 \pm \frac{2n\hbar\Omega}{c}\right)^2}}} \dot{x}_{(0)}. \quad (4.222)$$

Для частицы зазеркалья векторные уравнения движения имеют, соответственно, вид (3.355)

$$\ddot{x} = \frac{eH}{cB} \dot{z}, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = -\frac{eH}{cB} \dot{x}, \quad (4.223)$$

и отличаются от уравнений движения частицы нашего мира (4.216) лишь отсутствием членов, содержащих скорость вращения пространства Ω . В результате этого, решения для этих уравнений получаются просто из решений для нашего мира (4.217–4.219), если положить в них $\tilde{\omega} = \omega$. Соответственно, уравнение траектории частицы со спином в зазеркалье имеет следующий вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{\omega^2} \dot{x}_{(0)}^2, \quad r = \frac{-m_0 c^2 \mp \frac{2n\hbar\Omega}{c}}{eH \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{x}_{(0)}. \quad (4.224)$$

Выражение для полной энергии частицы со спином E_{tot} в магнитном поле, ортогональным полю неголономности, имеет такой же вид, как и в случае параллельной ориентации полей. Однако выражения для компонент полного импульса (4.204, 4.205) отличаются, так как в него входит скорость частицы, зависящая от направления магнитного поля и поля неголономности. В данном случае, когда эти поля ортогональны друг другу, компоненты скорости частицы (получающиеся дифференцированием выражений для координат)

в нашем мире имеют следующий вид

$$\dot{x} = \dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega} \tau, \quad (4.225)$$

$$\dot{y} = \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}} \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega} \tau - \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \ddot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau + \dot{y}_{(0)} + \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}^2} \ddot{x}_{(0)}, \quad (4.226)$$

$$\dot{z} = \frac{\omega}{\tilde{\omega}^2} \ddot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau - \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega} \tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{\omega}{\tilde{\omega}^2} \ddot{x}_{(0)}, \quad (4.227)$$

и в зазеркалье, соответственно,

$$\dot{x} = \dot{x}_{(0)} \cos \omega \tau + \frac{\ddot{x}_{(0)}}{\omega} \sin \omega \tau, \quad (4.228)$$

$$\dot{y} = \dot{y}_{(0)}, \quad (4.229)$$

$$\dot{z} = \frac{1}{\omega} \ddot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau - \dot{x}_{(0)} \sin \omega \tau + \dot{z}_{(0)} - \frac{1}{\omega} \ddot{x}_{(0)}. \quad (4.230)$$

Отсюда, полагая начальное ускорение частицы и константы интегрирования равными нулю, а также выбрав направление оси x вдоль начального импульса частицы, получаем компоненты её полного импульса в нашем мире

$$p_{\text{tot}}^1 = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau, \quad (4.231)$$

$$p_{\text{tot}}^2 = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \frac{2\Omega}{\tilde{\omega}} \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega} \tau, \quad (4.232)$$

$$p_{\text{tot}}^3 = \frac{m_0 c^2 \pm 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \frac{\omega}{\tilde{\omega}} \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega} \tau, \quad (4.233)$$

и в зазеркалье, соответственно,

$$p_{\text{tot}}^1 = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{x}_{(0)} \cos \tilde{\omega} \tau, \quad (4.234)$$

$$p_{\text{tot}}^2 = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{y}_{(0)} = 0, \quad (4.235)$$

$$p_{\text{tot}}^3 = \frac{-m_0 c^2 \mp 2n\hbar\Omega}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v_{(0)}^2}{c^2}}} \dot{x}_{(0)} \sin \tilde{\omega}\tau. \quad (4.236)$$

Полученные здесь решения преобразуются в соответствующие решения из электродинамики (§3.12), если положить $\hbar \rightarrow 0$.

4.8 Закон квантования масс элементарных частиц

Скалярные уравнения движения заряженной частицы со спином в электромагнитном поле в нашем мире и в зазеркалье, соответственно, имеют вид

$$\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = -\frac{e}{c^2} E_i v^i, \quad -\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = -\frac{e}{c^2} E_i v^i. \quad (4.237)$$

Они легко интегрируются, в результате чего получаются интегралы живых сил

$$m + \frac{\eta}{c^2} = B, \quad -\left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = \tilde{B}, \quad (4.238)$$

где B постоянная интегрирования в нашем мире и \tilde{B} постоянная интегрирования в зазеркалье.

Константы интегрирования определяются только начальными условиями. Поэтому мы всегда можем выбрать их так, чтобы константы интегрирования обратились в нуль.

Давайте найдём, при каких начальных условиях обращаются в нуль постоянные интегрирования скалярных уравнений движения заряженной частицы со спином в электромагнитном поле. Для заряженной частицы со спином нашего мира и зазеркалья (4.238), соответственно, мы имеем

$$m + \frac{\eta}{c^2} = 0, \quad -\left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = 0, \quad (4.239)$$

при этом правые части в векторных уравнениях движения (4.150, 4.152), содержащие трёхмерную х.и.-силу Лоренца, также обращаются в нуль, т.е. электромагнитное поле при условии равенства

нулю констант интегрирования скалярных уравнений движения не оказывает воздействия на частицу.

Сокращая в выражениях (4.239) релятивистский корень, что всегда можно сделать для массовых частиц (т.е. не обладающих массой покоя), мы можем записать эти соотношения в форме, не зависящей от скорости частицы. Тогда для массовой частицы нашего мира имеем

$$m_0 c^2 = -n \hbar^{mn} A_{mn}, \quad (4.240)$$

а для массовых частиц зазеркалья

$$m_0 c^2 = -n \hbar^{mn} A_{mn}. \quad (4.241)$$

Назовём эти соотношения *законом квантования масс элементарных частиц*:

Масса покоя элементарной частицы со спином пропорциональна энергии взаимодействия её спина с полем неголономности пространства, взятой с обратным знаком.

Или, иначе:

Энергия покоя массовой элементарной частицы равна энергии взаимодействия её спина с полем неголономности пространства, взятой с обратным знаком.

Поскольку в зеркальном мире как релятивистская энергия, так и спин-энергия любой частицы отрицательны, то закон квантования масс элементарных частиц зазеркалья (4.241) совпадает с законом квантования масс (4.240), полученным для частицы со спином в нашем мире.

Для бесспиновых частиц, очевидно, данные квантовые соотношения неприменимы.

Теперь давайте сделаем некоторые количественные оценки, следующие из полученного закона квантования масс элементарных частиц. Численные значения величины $\eta_0 = n \hbar^{mn} A_{mn}$, характеризующей энергию взаимодействия спина частицы с полем неголономности пространства (“спин-энергия”), мы получим следующим образом. Выразив тензор угловых скоростей вращения пространства A_{mn} через псевдовектор этого вращения $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}$

$$\Omega^{*i} \varepsilon_{imn} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ipq} \varepsilon_{imn} A_{pq} = \frac{1}{2} (\delta_m^p \delta_n^q - \delta_n^p \delta_m^q) A_{pq} = A_{mn}, \quad (4.242)$$

мы имеем $A_{mn} = \varepsilon_{imn} \Omega^{*i}$. Следовательно

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{imn} \hbar^{mn} = \hbar_{*i} \quad (4.243)$$

есть псевдовектор Планка, а величина $\eta_0 = n \hbar^{mn} \varepsilon_{imn} \Omega^{*i}$ равна

$$\eta_0 = 2n \hbar_{*i} \Omega^{*i}, \quad (4.244)$$

т.е. представляет собой удвоенное скалярное произведение трёхмерного псевдовектора Планка и трёхмерного псевдовектора скорости вращения пространства, умноженное на спиновое квантовое число частицы (скаляр).

Как известно, скалярное произведение двух псевдовекторов есть произведение их модулей (абсолютных величин) на косинус угла между ними. Тогда, если \hbar_{*i} и Ω^{*i} сонаправлены, то

$$\eta_0 = 2n \hbar_{*i} \Omega^{*i} = 2n \hbar \Omega \cos(\vec{\hbar}; \vec{\Omega}) > 0, \quad (4.245)$$

а если они противоположно направлены, то

$$\eta_0 = 2n \hbar_{*i} \Omega^{*i} = 2n \hbar \Omega \cos(\vec{\hbar}; \vec{\Omega}) < 0. \quad (4.246)$$

Таким образом, для любой массовой элементарной частицы константа интегрирования живых сил обращается в нуль, если псевдовекторы \hbar_{*i} и Ω^{*i} ориентированы в противоположные стороны.

Это означает: когда энергия взаимодействия спина массовой частицы с полем неголономности становится равной её энергии покоя $E = m_0 c^2$, импульс частицы никак не проявляется ни в нашем мире, ни в зазеркалье. Будем полагать, что ось z сонаправлена с псевдовектором угловой скорости вращения пространства Ω^{*i} . Тогда из всех трёх компонент Ω^{*i} отлична от нуля лишь компонента

$$\begin{aligned} \Omega^{*3} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{3mn} A_{mn} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{312} A_{12} + \varepsilon^{321} A_{21}) = \\ &= \varepsilon^{312} A_{12} = \frac{e^{312}}{\sqrt{\hbar}} A_{12}. \end{aligned} \quad (4.247)$$

Для простоты вычислений будем полагать, что трёхмерная метрика g_{ik} является евклидовой, а пространство вращается с постоянной угловой скоростью, равной Ω . Тогда компоненты линейной скорости вращения пространства равны $v_1 = \Omega x$, $v_2 = -\Omega y$ и $A_{12} = -\Omega$.

В таких условиях

$$\Omega^{*3} = \frac{e^{312}}{\sqrt{\hbar}} A_{12} = \frac{A_{12}}{\sqrt{\hbar}} = -\frac{\Omega}{\sqrt{\hbar}}, \quad (4.248)$$

где, согласно (4.180), мы имеем

$$\sqrt{\hbar} = \sqrt{\det \|h_{ik}\|} = \sqrt{1 + \frac{\Omega^2 (x^2 + y^2)}{c^2}}. \quad (4.249)$$

Так как в масштабах элементарных частиц $\sqrt{\hbar} \approx 1$, следовательно, можно считать, что $\Omega^{*3} = -\Omega = const$. Тогда закон квантования масс элементарных частиц (4.240) принимает вид

$$m_0 = \frac{2n\hbar\Omega}{c^2}. \quad (4.250)$$

Следовательно, для элементарных частиц нашего мира, обладающих спином, имеет место соотношение

$$\Omega = \frac{m_0 c^2}{2n\hbar}. \quad (4.251)$$

Это означает, что масса покоя (истинная масса) наблюдаемого объекта, в обычных макроусловиях никак не зависящая от свойств эталонов наблюдателя, в масштабах элементарных частиц становится жёстко зависимой от них, в частности, от величины угловой скорости вращения пространства.

Таким образом, у нас появилась возможность на основе закона квантования масс определить частоты вращения пространства наблюдателя, соответствующие массам покоя элементарных частиц нашего мира. Результаты этих расчётов приведены в таблице 4.1.

Результаты вычислений в этой таблице свидетельствуют: в масштабах элементарных частиц пространство наблюдателя в принципе неголономно. Например, при наблюдении электрона (его классический радиус $r_e = 2,8 \times 10^{-13}$ см) линейная скорость вращения пространства наблюдателя составляет $v = \Omega r = 2200$ км/сек*. По-

* Величина v равна скорости электрона на первой боровской орбите, хотя при вычислении скорости вращения пространства (табл. 4.1) мы рассматривали *свободный электрон*, т.е. электрон вне связи с атомным ядром и квантованием орбит в атоме водорода. Это связано с тем, что, по-видимому, “генетическая” квантовая неголономность пространства не только определяет массы покоя элементарных частиц, но также является причиной орбитального вращения электронов в атомах.

Название частицы	Масса покоя в массах m_e	Спин	Ω , сек $^{-1}$
Лептоны			
электрон e^- , позитрон e^+	1	1/2	$7,782 \times 10^{20}$
электронное нейтрино ν_e и электронное антинейтрино $\bar{\nu}_e$	$< 4 \times 10^{-4}$	1/2	$< 3 \times 10^{17}$
μ -мезонное нейтрино ν_μ и μ -мезонное антинейтрино $\bar{\nu}_\mu$	< 8	1/2	$< 6 \times 10^{21}$
μ^- -мезон, μ^+ -мезон	206,766	1/2	$1,609 \times 10^{23}$
Барионы			
<i>нуклоны</i>			
протон p, антипротон \bar{p}	1836,09	1/2	$1,429 \times 10^{24}$
нейтрон n, антинейтрон \bar{n}	1838,63	1/2	$1,431 \times 10^{24}$
<i>гипероны</i>			
Λ^0 -гиперон, анти- Λ^0 -гиперон	2182,75	1/2	$1,699 \times 10^{24}$
Σ^+ -гиперон, анти- Σ^+ -гиперон	2327,6	1/2	$1,811 \times 10^{24}$
Σ^- -гиперон, анти- Σ^- -гиперон	2342,6	1/2	$1,823 \times 10^{24}$
Σ^0 -гиперон, анти- Σ^0 -гиперон	2333,4	1/2	$1,816 \times 10^{24}$
Ξ^- -гиперон, анти- Ξ^- -гиперон	2584,7	1/2	$2,011 \times 10^{24}$
Ξ^0 -гиперон, анти- Ξ^0 -гиперон	2572	1/2	$2,00 \times 10^{24}$
Ω^- -гиперон, анти- Ω^- -гиперон	3278	3/2	$8,50 \times 10^{23}$

Таблица 4.1: Частоты вращения пространства элементарных частиц.

сколько размеры остальных элементарных частиц ещё меньше, это значение линейной скорости вращения пространства наблюдателя, по-видимому, является наибольшим (предельным)*.

Итак, что же мы получили? Обычно наблюдатель сравнивает результаты измерений с эталонами на теле отсчёта, но сам он и тело отсчёта никак не связаны с наблюдаемым объектом и не влияют на него в процессе измерений. Поэтому в обычных макроусловиях нет никакой зависимости истинных характеристик наблюдаемых тел (например, массы покоя частицы) от характеристик тела и пространства отсчёта — они могут быть любыми, как у взаимно *не связанных* объектов. Иначе говоря, хотя наблюдаемые объекты ис-

*Интересно, что вычисленные угловые скорости вращения пространства барионов (табл. 4.1) с точностью до порядка совпадают с частотой $\sim 10^{23}$ сек $^{-1}$, характеризующей элементарные частицы как осцилляторы [27].

кажены из-за влияния на них эталонов наблюдателя, собственно наблюдатель и его тело отсчёта в макроусловиях никак не влияют на измеряемые объекты. Другое дело — пространство в масштабах элементарных частиц. В этом параграфе мы убедились: как только мы достигаем таких малых масштабов, что спин, квантовая характеристика частицы, начинает оказывать ощутимое влияние на её движение — всё, — между физическими характеристиками пространства (тела) отсчёта и самой частицы тотчас же устанавливается жёсткая взаимосвязь, т.е. тело отсчёта начинает *влиять* на саму наблюдаемую частицу. Иначе говоря, наблюдатель уже не просто сравнивает характеристики наблюдаемого объекта со своими эталонами, а непосредственно *влияет* на наблюдаемый объект, формируя его характеристики в чёткой квантовой зависимости от свойств эталонов, имеющихя в его распоряжении (тело и пространство отсчёта).

Это означает: когда мы рассматриваем эффекты в масштабах элементарных частиц, например, спиновые эффекты, *стирается грань* между наблюдателем, т.е. его телом отсчёта, и наблюдаемым объектом — элементарной частицей. Поэтому появляется возможность установить *взаимосвязь* между полем неголономности пространства отсчёта, связанного с наблюдателем, и массами покоя наблюдаемых частиц — объектов наблюдений, в макромасштабах не связанных с телом отсчёта. Таким образом, обнаруженные законы квантования масс справедливы только для элементарных частиц.

Напомним, этот результат получен исключительно геометрическими методами теории относительности, вне связи с вероятностным аппаратом квантовой механики, и, поэтому, может в будущем послужить “мостом”, соединяющим эти две отрасли науки.

4.9 Комптоновская длина волны

Итак, мы получили, что частота неголономности пространства наблюдателя при наблюдении элементарной частицы массой m_0 равна $\Omega = \frac{m_0 c^2}{2n\hbar}$ (4.251). Вычислим длину волны, соответствующую этой частоте. Полагая, что эта волна, т.е. волна неголономности пространства наблюдателя, распространяется со скоростью света $\lambda\Omega = c$, имеем

$$\lambda = \frac{c}{\Omega} = 2n \frac{\hbar}{m_0 c}, \quad (4.252)$$

т.е. при наблюдении массовой частицы со спином $n = \frac{1}{2}$ длина волны неголономности (вращения) пространства наблюдателя равна комптоновской длине волны этой частицы $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}$.

Что это означает? Комптон-эффект — это “рассеяние” фотона на свободном электроне, сопровождающееся уменьшением его собственной частоты

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) = \lambda_c^e (1 - \cos \vartheta), \quad (4.253)$$

открытое Артуром Комптоном в 1922 году. Здесь λ_1 и λ_2 длина волны фотона до и после соударения, ϑ угол “рассеяния”. Множитель λ_c^e , характерный для электрона, назвали *комптоновской длиной волны* электрона. Затем выяснилось, что в процессе “рассеяния” фотонов на других элементарных частиц также проявляется характерная длина волны $\lambda_c = \frac{h}{m_0 c}$ или, иначе, $\lambda_c = \frac{\hbar}{m_0 c}$, т.е. для каждого типа элементарных частиц (электронов, протонов, нейтронов и т.д.) существует своя комптоновская длина волны. Физический смысл этой величины был выяснен позже. Оказалось, что в области, меньшей λ_c , элементарная частица перестаёт быть точечным объектом и её взаимодействие с другими частицами (и с наблюдателем) характеризуется законами квантовой механики. Поэтому область диаметром λ_c иногда интерпретируют как “размер” элементарной частицы в том условном смысле, в котором само понятие “размер” может быть применено к элементарным частицам.

Применительно к нашим результатам, полученным в предыдущем параграфе, это означает: при наблюдении массовой элементарной частицы угловая скорость вращения пространства отсчёта наблюдателя возрастает настолько, что длина волны, соответствующей этой скорости, становится равной комптоновской длине волны наблюдаемой частицы, т.е. её “размеру”, внутри которого частица перестаёт быть точечным объектом. Иначе говоря, именно угловая скорость вращения (длина “волны неголономности”) пространства наблюдателя определяет наблюдаемые комптоновские длины (характерные “размеры”) массовых элементарных частиц.

4.10 Безмассовая частица со спином

Так как безмассовые (светоподобные) частицы не обладают электрическим зарядом, их скалярные уравнения движения в на-

шем мире и в зазеркалье имеют вид, соответственно,

$$\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = 0, \quad -\frac{d}{d\tau} \left(m + \frac{\eta}{c^2} \right) = 0. \quad (4.254)$$

При их интегрировании константа интегрирования всегда равна нулю, поэтому в любом случае получаются выражения (4.239). Следовательно для безмассовых частиц нашего мира и для безмассовых частиц зазеркалья, мы имеем

$$mc^2 = -\eta. \quad (4.255)$$

Вместе с тем такого понятия, как “масса покоя” для безмассовых частиц, не существует — они пребывают в непрерывном движении. Их релятивистские массы определяются исходя из энергетического эквивалента $E = mc^2$, измеряемого в электрон-вольтах. Соответственно, для безмассовых частиц не существует и спин-энергия покоя $\eta_0 = n \hbar^{mn} A_{mn}$.

Тем не менее очевидно, что тензор Планка, содержащийся в спин-энергии η , создаёт условия квантования релятивистских масс безмассовых частиц и угловых скоростей вращения пространства. Следовательно, чтобы вычислить угловые скорости вращения пространства для безмассовых частиц, нам необходимо получить развёрнутое выражение для их релятивистской спин-энергии η , структура которой исключала бы наличие релятивистского корня.

В квантовой механике для безмассовых частиц вводится понятие *спиральность* — проекция спина на направление импульса. Основанием для введения такого понятия является тот факт, что безмассовая частица не может покоиться относительно обычного наблюдателя, так как всегда движется относительно него со скоростью света. Поэтому вполне естественно считать спин безмассовой частицы ориентированным по касательной к светоподобной траектории (либо сонаправленным с ней, либо противоположно направленным к ней).

Учитывая, что спиновое квантовое число n безмассовых частиц равно 1, будем полагать для них

$$\eta = \hbar^{mn} \tilde{A}_{mn}, \quad (4.256)$$

где \tilde{A}_{mn} трёхмерный тензор угловых скоростей вращения пространства безмассовых частиц (светоподобного пространства).

Поэтому, чтобы вычислить релятивистскую спин-энергию безмассовой частицы (4.256), нам необходимо определить компоненты тензора угловых скоростей вращения светоподобного пространства. Построим этот тензор по аналогии с четырёхмерным тензором угловой скорости $A^{\alpha\beta}$ (4.11), характеризующим вращение пространства некоторой системы отсчёта, движущейся относительно наблюдателя и его тела отсчёта с произвольной скоростью (несопутствующая система отсчёта). В результате получим

$$\tilde{A}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} c \tilde{h}^{\alpha\mu} \tilde{h}^{\beta\mu} \tilde{a}_{\mu\nu}, \quad \tilde{a}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{b}_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \tilde{b}_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (4.257)$$

где \tilde{b}^α в данном случае — четырёхмерная скорость светоподобной системы отсчёта относительно наблюдателя, и

$$\tilde{h}^{\alpha\mu} = -g^{\alpha\mu} + \tilde{b}^\alpha \tilde{b}^\mu \quad (4.258)$$

четырёхмерное обобщение “наблюдаемого” метрического тензора пространства светоподобной системы отсчёта.

Пространство, в котором обитают безмассовые частицы, есть область четырёхмерного пространства-времени, соответствующая четырёхмерным образующим изотропного (светового) конуса, описываемого уравнением $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$. Этот конус существует в любой точке риманова пространства со знакопеременной сигнатурой (+---), т.е. в любой точке четырёхмерного псевдориманова пространства. Четырёхмерный вектор скорости светоподобной системы отсчёта безмассовых частиц имеет вид

$$\tilde{b}^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = \frac{dx^\alpha}{c d\tau}, \quad \tilde{b}_\alpha \tilde{b}^\alpha = 0, \quad (4.259)$$

его физически наблюдаемые компоненты в системе отсчёта обычного досветового наблюдателя равны

$$\frac{\tilde{b}_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm 1, \quad \tilde{b}^i = \frac{1}{c} \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{c} c^i, \quad (4.260)$$

остальные компоненты изотропного вектора (4.259)

$$\tilde{b}^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left(\frac{1}{c^2} v_i c^i \pm 1 \right), \quad \tilde{b}_i = -\frac{1}{c} (c_i \pm v_i), \quad (4.261)$$

где c^i трёхмерный х.и.-вектор скорости света.

Рассмотрим данные характеристики пространства безмассовой частицы более подробно. Условие изотропности четырёхмерного вектора скорости безмассовой частицы $b_\alpha b^\alpha = 0$ в х.и.-форме принимает вид

$$h_{ik} c^i c^k = c^2 = const, \quad (4.262)$$

где h_{ik} наблюдаемый метрический тензор пространства отсчёта (обычного, т.е. досветового наблюдателя). Компоненты четырёхмерного тензора $\tilde{h}^{\alpha\beta}$ (4.258), трёхмерные компоненты которого составляют наблюдаемый метрический тензор пространства безмассовой частицы \tilde{h}^{ik} , таковы

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}^{00} &= \frac{v_k v^k \pm 2v_k c^k + \frac{1}{c^2} v_k v_n c^k c^n}{c^2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2} \\ \tilde{h}^{0i} &= \frac{v^i \pm c^i + \frac{1}{c^2} v_k c^k c^i}{c \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)}, \quad \tilde{h}^{ik} = h^{ik} + \frac{1}{c^2} c^i c^k \end{aligned} \right\}, \quad (4.263)$$

где знак “плюс” относится к пространству с прямым ходом времени (наш мир) и знак “минус” — к пространству с обратным ходом времени (зазеркалье).

Теперь осталось вычислить компоненты ротора четырёхмерного вектора скорости безмассовой частицы, который входит в выражение для тензора вращения пространства безмассовой частицы (4.257). Вычисляя, получаем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{a}_{00} &= 0, \quad \tilde{a}_{0i} = \frac{1}{2c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left(\pm F_i - \frac{* \partial c_i}{\partial t}\right) \\ \tilde{a}_{ik} &= \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial c_i}{\partial x^k} - \frac{\partial c_k}{\partial x^i}\right) \pm \frac{1}{2c} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^k} - \frac{\partial v_k}{\partial x^i}\right) \end{aligned} \right\}. \quad (4.264)$$

Вообще для определения спин-энергии безмассовой частицы (4.256) нам необходимы ковариантные пространственные компоненты тензора вращения её пространства, т.е. компоненты с нижними индексами \tilde{A}_{ik} . Чтобы вычислить их, возьмём выражение для контравариантных компонент \tilde{A}^{ik} , а затем опустим их индексы, как для любой х.и.-величины, с помощью трёхмерного наблюдаемого метрического тензора пространства отсчёта наблюдателя.

Подставляя в выражение

$$\tilde{A}^{ik} = c \left(\tilde{h}^{i0} \tilde{h}^{k0} \tilde{a}_{00} + \tilde{h}^{i0} \tilde{h}^{km} \tilde{a}_{0m} + \tilde{h}^{im} \tilde{h}^{k0} \tilde{a}_{m0} + \tilde{h}^{im} \tilde{h}^{kn} \tilde{a}_{mn} \right) \quad (4.265)$$

вычисленные компоненты $\tilde{h}^{\alpha\beta}$ и $\tilde{a}_{\alpha\beta}$, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{ik} = & h^{im} h^{kn} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_n c_m - F_m c_n) \right] \pm \\ & \pm h^{im} h^{kn} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_n v_m - F_m v_n) \right] + \\ & + \left(\frac{1}{c^2} v_n c^n \pm 1 \right) (c^k h^{im} - c^i h^{km})^* \frac{\partial c_m}{\partial t} - \\ & - (v^k h^{im} - v^i h^{km})^* \frac{\partial c_m}{\partial t} + \frac{1}{2c^2} c^m (c^i h^{kn} - c^k h^{in}) \times \\ & \times \left[\left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m} \right) \pm \left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.266)$$

Величина $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_m}{\partial x^n} - \frac{\partial v_n}{\partial x^m} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_n v_m - F_m v_n)$, по определению, есть наблюдаемый х.и.-тензор угловых скоростей вращения пространства отсчёта наблюдателя A_{mn} , т.е. *тензор неголономности неизотропного пространства**.

По своей структуре величина $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_n c_m - F_m c_n)$ аналогична тензору A_{mn} , только вместо скорости вращения v_i ; неизотропного пространства наблюдателя здесь стоят компоненты ковариантного вектора скорости света $c_m = h_{mn} c^n$, являющегося физической наблюдаемой величиной (так как он получен опусканием индекса у х.и.-вектора c^n с помощью х.и.-метрического тензора h_{mn}). Обозначим этот тензор \check{A}_{mn} , где полумесяц, обращённый вверх, символизирует принадлежность указанной величины к *изотропному пространству*[†] с прямым ходом времени — “верхней” части

*Мы будем называть *неизотропным пространством* область четырёхмерного пространства-времени, в которой существуют частицы с ненулевой массой покоя. Эта область мировых траекторий, вдоль которых $ds \neq 0$. Соответственно, если интервал ds вещественный, то скорости частиц досветовые (обычные частицы), если мнимый, то скорости частиц сверхсветовые (таххионы). Пространство и тех и других частиц является неизотропным по определению.

†Мы будем называть *изотропным пространством* область четырёхмерного пространства-времени, где обитают безмассовые (светоподобные) частицы. Эту

светового конуса, принимающего в искривлённом пространстве-времени “округлые” очертания. Тогда

$$\check{A}_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_n c_m - F_m c_n). \quad (4.267)$$

В частном случае, когда гравитационный потенциал пренебрежимо мал (т.е. где $w \approx 0$), этот тензор принимает вид

$$\check{A}_{mn} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_m}{\partial x^n} - \frac{\partial c_n}{\partial x^m} \right), \quad (4.268)$$

т.е. представляет собой х.и.-вихрь трёхмерного наблюдаемого вектора скорости света. Поэтому мы будем называть величину \check{A}_{mn} *вихрем изотропного пространства*.

Геометрически представить себе вихрь изотропного пространства можно на следующем примере. Как известно, необходимым и достаточным условием равенства нулю тензора $A_{mn} = 0$ (условием голономности пространства) является обращением в нуль всех компонент $v_i = -c \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$, т.е. отсутствие вращения пространства. Тензор \check{A}_{mn} определён только для изотропного пространства, заполненного безмассовыми частицами. Вне изотропного пространства он теряет смысл, так как “внутри” светового конуса обитают досветовые частицы, а “снаружи” — тахионы. Нас интересуют безмассовые частицы, обладающие спином, т.е. фотоны. Из выражения (4.268) следует, что наличие поля неголономности изотропного пространства неразрывно связано с вихревым характером скорости движения безмассовых частиц c_m . Таким образом, фотоны — это вихри изотропного пространства. А спин фотонов — результат взаимодействия внутреннего поля этого вихря с внешним полем тензора \check{A}_{mn} .

Для большей наглядности представим области существования частиц разных типов. Световой конус существует в каждой точке пространства. Уравнение светового конуса $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$, записанное в х.и.-форме, имеет вид

$$c^2 \tau^2 - h_{ik} x^i x^k = 0, \quad h_{ik} x^i x^k = \sigma^2. \quad (4.269)$$

область можно также назвать *световой мембраной*. С геометрической точки зрения световая мембрана — это поверхность изотропного конуса, т.е. совокупность его четырёхмерных образующих (мировых линий распространения света).

Световой конус на диаграмме Минковского “внутри” заполнен неизотропным пространством, в котором и обитают досветовые массовые частицы. “Снаружи” также находится область неизотропного пространства, в которой обитают сверхсветовые частицы (тахiony). Собственно изотропное пространство безмассовых частиц представляет собой *пространственно-временную мембрану* между этими двумя неизотропными областями. Картина зеркальна: в верхней части конуса расположено досветовое пространство с прямым ходом времени (наш мир), отделённое пространственным сечением от нижней части — досветового пространства с обратным ходом времени (зазеркалье). Иначе говоря, в верхней части обитают вещественные частицы с положительными массами и энергиями, а в нижней части — их зеркальные “партнёры”, массы и энергии которых (с нашей точки зрения) отрицательны. Таким образом, вращение досветового неизотропного пространства раскручивает окружающую световую мембрану (изотропное пространство светового конуса). В результате световой конус приобретает вращение, характеризующееся тензором \check{A}_{mn} (вихрем изотропного пространства).

Вернёмся к релятивистской спин-энергии безмассовой частицы $\eta = \hbar^{mn} \check{A}_{mn}$ (4.256). Опуская индексы у контравариантного тензора неголономности изотропного пространства \check{A}^{ik} (4.266), получаем

$$\begin{aligned} \check{A}_{ik} = & \pm A_{ik} + \check{A}_{ik} + \frac{1}{2c^2} c^m \left\{ c_i \left[\frac{\partial(c_m \pm v_m)}{\partial x^k} - \frac{\partial(c_k \pm v_k)}{\partial x^m} \right] - \right. \\ & \left. - c_k \left[\frac{\partial(c_m \pm v_m)}{\partial x^i} - \frac{\partial(c_i \pm v_i)}{\partial x^m} \right] \right\} + \left(v_i \frac{* \partial c_k}{\partial t} - v_k \frac{* \partial c_i}{\partial t} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{c^2} v_n v^n \pm 1 \right) \left(c_k \frac{* \partial c_i}{\partial t} - c_i \frac{* \partial c_k}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (4.270)$$

Свёртывая эту величину \check{A}_{ik} с тензором Планка \hbar^{ik} , имеем

$$\begin{aligned} \eta = & \eta_0 + n \hbar^{ik} \check{A}_{ik} + \left[\left(\frac{1}{c^2} v_n v^n \pm 1 \right) \left(c_k \frac{* \partial c_i}{\partial t} - c_i \frac{* \partial c_k}{\partial t} \right) + \right. \\ & + \left. \left(v_i \frac{* \partial c_k}{\partial t} - v_k \frac{* \partial c_i}{\partial t} \right) \right] n \hbar^{ik} + \frac{1}{2c^2} n \hbar^{ik} c^m \left\{ c_i \left[\frac{\partial(c_m \pm v_m)}{\partial x^k} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial(c_k \pm v_k)}{\partial x^m} \right] - c_k \left[\frac{\partial(c_m \pm v_m)}{\partial x^i} - \frac{\partial(c_i \pm v_i)}{\partial x^m} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.271)$$

где “плюс” имеет место в нашем мире, “минус” — в зазеркалье. Величина $\eta_0 = \eta \sqrt{1 - v^2/c^2}$ для безмассовых частиц равна нулю, так как они движутся со скоростью света. Отсюда, учитывая, что $\eta_0 = n \hbar^{mn} A_{mn}$, мы получаем дополнительное условие, накладываемое на тензор неголономности изотропного пространства \check{A}_{ik} : в том месте, где проходит траектория безмассовой частицы, должно выполняться соотношение

$$\hbar^{mn} A_{mn} = 2\hbar (A_{12} + A_{23} + A_{31}) = 0, \quad (4.272)$$

или, в другой форме записи, $\Omega^1 + \Omega^2 + \Omega^3 = 0$.

Таким образом, в том месте, где наблюдатель фиксирует безмассовую частицу, угловая скорость вращения неизотропного пространства наблюдателя равна нулю. Остальные члены в выражении для релятивистской спин-энергии безмассовой частицы (4.271) обусловлены возможной нестационарностью скорости света $\frac{\partial c_i}{\partial t}$, а также зависимостями, квадратичными по скорости света. Исследуем полученное выражение (4.271), сделав два упрощающих предположения:

- 1) гравитационный потенциал пренебрежимо мал ($w \approx 0$);
- 2) трёхмерный х.и.-вектор скорости света является стационарным.

В этом случае выражения для A_{ik} и \check{A}_{ik} , т.е. для тензора неголономности пространства наблюдателя и для вихря изотропного пространства, принимают вид

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right), \quad \check{A}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_k}{\partial x^i} - \frac{\partial c_i}{\partial x^k} \right). \quad (4.273)$$

Соответственно, релятивистская спин-энергия безмассовой частицы (4.271)) принимает следующий вид

$$\eta = n \left(\hbar^{ik} \check{A}_{ik} + \frac{1}{c^2} c_i c^m \hbar^{ik} \check{A}_{km} \right). \quad (4.274)$$

Таким образом, величина η (4.274), характеризующая проявление спина безмассовой частицы, определяется (помимо спина самой частицы) исключительно вихрем изотропного пространства и никак не зависит от неголономности (вращения пространства отсчёта наблюдателя).

Для конкретных расчётов полученную величину η (4.274) удобно преобразовать следующим образом. По аналогии с псевдовектором угловой скорости вращения пространства отсчёта наблюдателя $\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikm} A_{km}$ введём псевдовектор

$$\check{\Omega}^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ikm} \check{A}_{km}, \quad (4.275)$$

который формально можно рассматривать как псевдовектор угловой скорости вращения изотропного пространства, т.е. пространства, в котором существуют лишь изотропные кривые — траектории безмассовых частиц, движущихся со скоростью света. Соответственно, мы имеем $\check{A}_{km} = \varepsilon_{kmn} \check{\Omega}^{*n}$. Тогда формулу для η (4.274) можно записать в следующем виде

$$\eta = n \left(\check{h}_{*i} \check{\Omega}^{*i} + \frac{1}{c^2} c_i c^m \check{h}^{ik} \varepsilon_{kmn} \check{\Omega}^{*n} \right). \quad (4.276)$$

Иными словами, внутренний вихрь (спин) безмассовой частицы проявляется лишь во взаимодействии с вихрем самого изотропного пространства. Результат этого взаимодействия — скалярное произведение $\check{h}_{*i} \check{\Omega}^{*i}$, с которым отождествляется спин безмассовой частицы. Следовательно, безмассовые частицы — это элементарные светоподобные вихри самого изотропного пространства.

Теперь оценим скорости вращения изотропного пространства для безмассовых частиц различных энергий. На сегодняшний день точно известно, что к безмассовым частицам относятся фотоны — кванты электромагнитного поля. Спиновое квантовое число фотонов равно 1. Кроме того, их энергия $E = \hbar \omega$ в нашем мире принимает положительные значения. Поэтому, с учётом интеграла живых сил (4.255), для наблюдаемых фотонов нашего мира имеем

$$\hbar \omega = \check{h}_{*i} \check{\Omega}^{*i} + \frac{1}{c^2} c_i c^m \check{h}^{ik} \varepsilon_{kmn} \check{\Omega}^{*n}. \quad (4.277)$$

Будем полагать, что псевдовектор вращения изотропного пространства Ω^{*i} направлен вдоль оси z , а вектор скорости света — вдоль оси y . Тогда полученное для фотонов соотношение (4.277) принимает вид $\hbar \omega = 2\hbar\check{\Omega}$, или, после сокращения на \hbar ,

$$\check{\Omega} = \frac{\omega}{2} = \frac{2\pi\nu}{2} = \pi\nu, \quad (4.278)$$

Вид фотонов	Диапазон Ω , сек ⁻¹
радиоволны	$10^3 - 10^{11}$
инфракрасные лучи	$10^{11} - 1,2 \times 10^{15}$
видимый свет	$1,2 \times 10^{15} - 2,4 \times 10^{15}$
ультрафиолетовые лучи	$2,4 \times 10^{15} - 10^{17}$
рентгеновские лучи	$10^{17} - 10^{19}$
гамма-лучи	$10^{19} - 10^{23}$ и более

Таблица 4.2: Частоты вращения изотропного пространства, соответствующие фотонам различных длин волн.

т.е. частота Ω вихря изотропного пространства, взаимодействующего со спином фотона, по порядку совпадает с его собственной частотой ν . Пользуясь этим соотношением, являющимся следствием закона квантования релятивистских масс светоподобных частиц, можно оценить величины угловых скоростей вращения изотропного пространства, соответствующих фотонам (квантам электромагнитного поля) с различными энергиями. Результаты приведены в таблице 4.2.

Таким образом, угловые скорости вращения изотропного пространства фотонов в диапазоне гамма-лучей лежат в диапазоне частот вращения обычного (неизотропного) пространства электрона и других элементарных частиц (табл. 4.2).

4.11 Заключение

Подводя итог этой главе, мы можем констатировать следующее. Спин частицы характеризуется четырёхмерным антисимметричным тензором 2-го ранга (тензором Планка), диагональные и пространственно-временные координаты которого равны нулю, а перекрёстные пространственные компоненты численно равны $\pm\hbar$ в зависимости от ориентации спина в пространстве и выбора правой или левой системы координат. Спин (внутренний вихрь частицы) взаимодействует с внешним полем неголономности пространства, в результате чего частица приобретает дополнительный импульс, отклоняющий её траекторию от геодезической линии. Энергия этого взаимодействия входит в скалярное уравнение движения (теорему живых сил), которое необходимо учитывать при решении вектор-

ных (пространственных) уравнений движения частицы. Частным решением скалярного уравнения движения является закон квантования масс элементарных частиц со спином, устанавливающий однозначную зависимость между массами покоя элементарных частиц и угловыми скоростями вращения пространства наблюдателя, а также между релятивистскими массами фотонов и угловыми скоростями вращения их изотропного (светоподобного) пространства. Так как область существования светоподобных частиц — это область четырёхмерных изотропных траекторий, то понятия “изотропное пространство” и “светоподобное пространство” можно считать синонимами.

5.1 Введение

Средняя плотность материи в нашей Вселенной по последним данным составляет $\sim 5-10 \times 10^{-30}$ грамм/см³. Средняя плотность вещества в галактиках больше, $\sim 10^{-24}$ грамм/см³, что возможно связано с существованием так называемой “скрытой массы” галактик. Кроме того, согласно астрономическим наблюдениям, большая часть массы собрана в компактных объектах, например, звёздах, занимающих несопоставимо ничтожную долю объёма всей Вселенной (“островное” распределение вещества). Поэтому можно считать, что наша Вселенная в среднем состоит почти из пустоты.

Длительное время между понятиями “пустота” и “вакуум” ставили знак равенства. Однако, начиная с 1920-х годов, применение геометрических методов общей теории относительности показало, что пустота и вакуум представляют собой различные состояния материи.

Распределение материи в пространстве характеризуется тензором энергии-импульса, который связан с геометрической структурой пространства-времени (фундаментальным метрическим тензором) *уравнениями поля*. В теории тяготения Эйнштейна, являющейся одним из разделов общей теории относительности*, уравнения поля имеют вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (5.1)$$

*Общая теория относительности исторически была сформулирована как представление о геометрической структуре нашего мира в виде четырёхмерного (в общем случае искривлённого, неоднородного и анизотропного) псевдориманова пространства со всеми вытекающими из этого кинематическими и динамическими эффектами. Это дало возможность применить чисто геометрические методы римановой геометрии для исследования Вселенной, в частности, позволило Эйнштейну в дальнейшем предложить уравнения поля и построить на их основе релятивистское обобщение ньютоновской теории тяготения.

Эти уравнения поля, называемые уравнениями Эйнштейна*, помимо тензора энергии-импульса и фундаментального метрического тензора, включают в себя следующие величины:

- 1) $R_{\alpha\sigma} = R_{\alpha\beta\sigma}^{\dots\beta}$ тензор Риччи† — результат свёртывания тензора кривизны Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ по двум индексам;
- 2) $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ скалярная кривизна;
- 3) $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,862 \times 10^{-27}$ см/грамм постоянная Эйнштейна, где $G = 6,672 \times 10^{-8}$ см³/грамм сек² гравитационная постоянная. Однако, некоторые авторы в качестве коэффициента используют величину $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ как у Ландау и Лифшица [10], вместо $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$. Чтобы понять, в чем тут дело, рассмотрим наблюдаемые х.и.-компоненты тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$: наблюдаемую плотность массы $\frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho$, вектор наблюдаемой плотности импульса $\frac{cT_{0i}^i}{\sqrt{g_{00}}} = J^i$, тензор наблюдаемой плотности потока импульса $c^2 T^{ik} = U^{ik}$. См. работы Зельманова [11–13]. Скалярная наблюдаемая х.и.-компонента уравнений Эйнштейна имеет вид $\frac{G_{00}}{g_{00}} = -\frac{\kappa T_{00}}{g_{00}} + \lambda$. Размерность тензора Риччи [см⁻²], следовательно, и тензора Эйнштейна $G_{\alpha\beta}$ тоже. Тогда очевидно, что $\frac{\kappa T_{00}}{g_{00}} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$ также имеет размерность [см⁻²]. Таким образом, размерность тензора энергии-импульса $T_{\alpha\beta}$ равна размерности плотности массы [грамм/см³]. Это, в частности, означает, что, когда в качестве коэффициента в правой части уравнений Эйнштейна стоит $\frac{8\pi G}{c^4}$, в действительности используется не собственно тензор энергии-импульса, а величина $c^2 T_{\alpha\beta}$, скалярная наблюдаемая компонента которой представляет собой плотность энергии $\frac{c^2 T_{00}}{g_{00}} = \rho c^2$, а векторная наблюдаемая компонента — поток энергии $\frac{c^3 T_{0i}^i}{\sqrt{g_{00}}} = c^2 J^i$;
- 4) λ [см⁻²] космологический член, характеризующий ньютоновские силы притяжения или отталкивания в зависимости от знака λ (при $\lambda > 0$ отталкивание, при $\lambda < 0$ притяжение). Эта величина называется космологической, так как считается, что

*Часто левую часть уравнений (5.1) называют *тензором Эйнштейна* $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$, записывая в виде $G_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$.

†Грегорио Риччи-Курбастро (1853–1925), итальянский математик, бывший учеником Туллио Леви-Чивиты в Падуе, в 1890-е годы.

силы, характеризуемые λ -членом, увеличиваются пропорционально расстоянию, поэтому их проявления лучше заметны на “космологических” расстояниях, сравнимых с размерами всей Вселенной. Поскольку ньютоновские гравитационные поля (λ -поля) не наблюдались, для нашей Вселенной в целом космологический член равен $|\lambda| < 10^{-56} \text{ см}^{-2}$ (при нынешней точности измерений).

Из уравнений поля Эйнштейна (5.1) видно, что тензор энергии-импульса (характеризующий распределение материи) генетически связан с метрическим тензором и тензором Риччи, а, следовательно, и с тензором кривизны Римана-Кристоффеля. Равенство тензора Римана-Кристоффеля нулю является необходимым и достаточным условием того, чтобы данное пространство-время было плоским. Тензор Римана-Кристоффеля отличен от нуля для искривлённого пространства. Он проявляется в виде приращения вектора V^α при его параллельном переносе по замкнутому контуру

$$\Delta V^\mu = -\frac{1}{2} R^{\dots\mu}_{\alpha\beta\gamma} V^\alpha \Delta\sigma^{\beta\gamma}, \quad (5.2)$$

где $\Delta\sigma^{\beta\gamma}$ площадь данного контура. В результате исходный вектор V^α и вектор $V^\alpha + \Delta V^\alpha$ различаются по направлению. Количественно эта разница характеризуется величиной K , называемой *четырёхмерной кривизной* псевдориманова пространства в направлении данного параллельного переноса (подробнее см. главу 9 в лекциях Зельманова [12])

$$K = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\tan \varphi}{\Delta\sigma}, \quad (5.3)$$

где $\tan \varphi$ тангенс угла между вектором V^α и проекцией вектора $V^\alpha + \Delta V^\alpha$ на площадку, ограничивающую контур переноса. Например, возьмём некоторую поверхность и на ней “геодезический” треугольник, образованный пересечением трёх геодезических линий. Перенесём какой-либо вектор, определённый в одной из точек этого треугольника, параллельно самому себе вдоль его сторон. Суммарный угол поворота φ после возвращения вектора в исходную точку $\varphi = \Sigma - \pi$ (где Σ сумма внутренних углов треугольника). Пусть кривизна поверхности K одинакова во всех её точках, тогда

$$K = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\tan \varphi}{\Delta\sigma} = \frac{\varphi}{\sigma} = \text{const}, \quad (5.4)$$

где σ площадь треугольника, а величина $\varphi = K\sigma$ называется *сферическим избытком*. Если $\varphi = 0$, то и кривизна $K = 0$, т.е. поверхность является плоской. В этом случае сумма внутренних углов геодезического треугольника равна π (плоское пространство). Если $\Sigma > \pi$ (переносимый вектор поворачивается в направлении обхода), то имеется положительный сферический избыток и кривизна $K > 0$. Пример такой поверхности — внешняя поверхность сферы: треугольник на сфере является выпуклым. Если $\Sigma < \pi$ (переносимый вектор поворачивается против направления обхода), то сферический избыток отрицателен и кривизна $K < 0$. Пример — внутренняя поверхность сферы: на ней треугольник является вогнутым.

Итак, Альберт Эйнштейн постулировал, что гравитация — это кривизна пространства-времени. Кривизна понимается им (как и в римановой геометрии вообще) как отличие от нуля тензора Римана-Кристоффеля $R_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$. Это концепция полностью содержит в себе концепцию гравитации Ньютона, а именно, эйнштейновская четырёхмерная гравитация-кривизна проявляется для обычного физического наблюдателя в виде:

- 1) ньютоновской гравитации;
- 2) вращения трёхмерного пространства;
- 3) деформации трёхмерного пространства;
- 4) трёхмерной кривизны, т.е. символы Кристоффеля отличны от нуля (см. §13.5 в лекциях Зельманова [12]).

Согласно принципу Маха, из которого выросла теория тяготения Эйнштейна, “. . . свойство инерции полностью обусловлено взаимодействием материи” [28], т.е. кривизна пространства-времени создаётся заполняющей его материей (в той или иной форме). Это позволяет дать на основе уравнений Эйнштейна (5.1) математические определения пустоты и вакуума:

Пустота — это состояние пространства-времени, при котором тензор Риччи $R_{\alpha\beta} = 0$, т.е. отсутствуют вещество $T_{\alpha\beta} = 0$ и ньютоновские гравитационные поля $\lambda = 0$. Уравнения поля (5.1) в пустоте сводятся к тождеству $R_{\alpha\beta} = 0$;^{*}

^{*}Записав уравнения Эйнштейна для пустого пространства $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = 0$ в смешанном виде $R_{\alpha}^{\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha}^{\beta}R = 0$, после свёртывания $R_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2}g_{\alpha}^{\alpha}R = 0$ получаем $R - \frac{1}{2}4R = 0$, т.е. скалярная кривизна в пустоте $R = 0$. Следовательно, уравнения поля в пустом пространстве имеют вид $R_{\alpha\beta} = 0$.

Физический вакуум, или просто вакуум — это состояние, в котором отсутствует вещество $T_{\alpha\beta} = 0$, но $\lambda \neq 0$ и, соответственно, $R_{\alpha\beta} \neq 0$. Пустота — частный случай вакуума в отсутствии λ -поля. Уравнения поля в вакууме принимают вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (5.5)$$

Система уравнений Эйнштейна применима к самым разнообразным распределениям материи за исключением тех случаев, когда плотность приближается к плотности вещества в атомных ядрах. Трудно строго математически исследовать все возможные случаи распределения материи, так как эта задача является слишком общей и в таком виде не решается. Вместе с тем, средняя плотность вещества в нашей Вселенной так мала ($5-10 \times 10^{-30}$ грамм/см³), что можно считать её состояние близким к вакууму. Уравнения Эйнштейна свидетельствуют: тензор энергии-импульса связан функциональной зависимостью с метрическим тензором и тензором Риччи (т.е. тензором кривизны, свёрнутым по двум индексам). При таких малых значениях плотности можно считать тензор энергии-импульса пропорциональным метрическому тензору $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$ и, следовательно, пропорциональным тензору Риччи. Таким образом, наряду с уравнениями поля в вакууме (5.5) можно рассматривать уравнения поля вида

$$R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}, \quad k = const, \quad (5.6)$$

где тензор энергии-импульса отличается от метрического тензора лишь постоянным множителем. Этот случай, включающий в себя как случай отсутствия масс (вакуум), так и близкие к нему состояния и имеющий прямое отношение к нашей Вселенной, подробно исследовал А. З. Петров [29, 30]. Пространства такого типа, в которых тензор энергии-импульса пропорционален метрическому тензору (и тензору Риччи), он назвал *пространствами Эйнштейна*.

Пространства с $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$ (пространства Эйнштейна) однородны на всем своём протяжении, в них нет потоков массы, а плотность заполняющей их материи (в том числе и вещества, при наличии такового) везде постоянна. В этом случае

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = 4k, \quad (5.7)$$

а тензор Эйнштейна имеет вид

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -k g_{\alpha\beta}, \quad (5.8)$$

где величина $k g_{\alpha\beta}$ является аналогом тензора энергии-импульса материи, заполняющей пространства Эйнштейна.

Чтобы выяснить какие типы материи заполняют пространства Эйнштейна, Петров исследовал алгебраическую структуру тензора энергии-импульса. Как это делается: тензор $T_{\alpha\beta}$ сравнивают в какой-либо точке с метрическим тензором — в данной точке составляют разность $T_{\alpha\beta} - \xi g_{\alpha\beta}$ где ξ так называемые собственные значения матрицы $T_{\alpha\beta}$, приравнивают эту разность к нулю и выясняют, при каких ξ данное равенство имеет место. Иначе это называется задачей об отыскании собственных значений матрицы*. Набор собственных значений матрицы позволяет судить об её алгебраическом типе. Для знакоопределённой метрики эта задача решена давно. Петров разработал метод приведения матрицы к каноническому виду для индефинитной (знакопеременной) метрики, что позволило использовать его в псевдоримановом пространстве, в частности, для исследования алгебраической структуры тензора энергии-импульса. Наглядно это можно представить себе следующим образом. Собственные значения матрицы $T_{\alpha\beta}$ аналогичны базисным векторам матрицы метрического тензора, т.е. представляют собой как бы “скелет” $T_{\alpha\beta}$ (скелет материи), но, зная скелет, мы не знаем точно, как нарастить на него “мясо”. Тем не менее по структуре этого скелета (длине и взаимному направлению векторов) можно судить об основных свойствах материи, например, таких, как однородность или изотропия, и их связи с кривизной пространства.

В результате Петров выяснил, что в пространствах Эйнштейна существуют 3 основных алгебраических типа тензора энергии-импульса и несколько их подтипов. Соответственно алгебраической классификации тензора энергии-импульса и тензора кривизны пространства, все пространства Эйнштейна делятся на три основных типа 1, 2, 3 (так называемая *петровская классификация*)[†].

* Вообще, задача определения собственных значений матрицы решается в точке, но полученный результат справедлив и для любой точки пространства.

[†] Хронометрически инвариантное представление алгебраической классифика-

Пространства 1-го типа наиболее понятны, потому что в них поле тяготения создаётся массивным островом (“островное” распределение вещества), а само пространство может быть пустым или заполненным вакуумом. Кривизна такого пространства создаётся как островной массой, так и вакуумом. На бесконечном расстоянии от островной массы, в отсутствии вакуума, пространство становится плоским. Без островной массы, но заполненное вакуумом, пространство 1-го типа также обладает кривизной (например, пространство де Ситтера). Пустое пространство 1-го типа, т.е. без островов масс и не заполненное вакуумом, является плоским.

Пространства 2-го и 3-го типов считаются более экзотическими, так как являются искривлёнными сами по себе. Их кривизна не связана с островным распределением масс или с наличием вакуума. Пространства 2-го и 3-го типа обычно связывают с полями излучения, например, с гравитационными волнами.

Спустя несколько лет после Петрова, Э. Б. Глинер [32–34], исследуя алгебраическую структуру тензора энергии-импульса вакуумоподобных состояний материи ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$), выделил особый его тип, для которого все 4 собственных числа одинаковы, т.е. 3 пространственных вектора и 1 временной вектор “орторепера” тензора $T_{\alpha\beta}$ равны между собой*. Материя, отвечающая тензору энергии-импульса с такой структурой, обладает постоянной плотностью $\mu = const$, равной значению совпадающих собственных чисел тензора энергии-импульса $\mu = \xi$ (размерность μ такая же, как и размерность $T_{\alpha\beta}$ [грамм/см³]). Собственно тензор энергии-импульса в этом случае равен[†]

$$T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}. \quad (5.9)$$

ции пространств Эйнштейна (полей тяготения Петрова) была выполнена в 1970 году одним из авторов этой книги — Л. Б. Борисовой (Григорьевой) [31].

*Если ввести локальное плоское пространство, касательное риманову пространству в точке, то собственные значения ξ тензора $T_{\alpha\beta}$ суть значения в орторепере, поставленном в соответствие этому тензору, по сравнению с собственными значениями метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ в орторепере, определяемом в данном касательном пространстве.

[†]В оригинальной работе Глинера принята сигнатура $(-+++)$, поэтому у него $T_{\alpha\beta} = -\mu g_{\alpha\beta}$ и, следовательно, так как наблюдаемая плотность материи положительна $\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = -\mu > 0$, численное значение μ у Глинера получается отрицательным. У нас, как и в работах Зельманова, принята сигнатура $(+---)$, таким образом, в нашей книге $\mu > 0$ и $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$.

Уравнения поля при $\lambda = 0$ имеют вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa \mu g_{\alpha\beta}, \quad (5.10)$$

а когда космологический член $\lambda \neq 0$, то

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa \mu g_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (5.11)$$

Такое состояние материи Глинер назвал *μ -вакуум* [32–34], так как оно относится к вакуумоподобным состояниям вещества (где $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, $R_{\alpha\beta} = \kappa g_{\alpha\beta}$), но вакуумом не является (в вакууме $T_{\alpha\beta} = 0$). Глинер показал, что пространства, заполненные μ -вакуумом, представляют собой пространства Эйнштейна, причём существуют три основных типа μ -вакуума, которые соответствуют трём основным типам тензора энергии-импульса (и тензора кривизны): пространство Эйнштейна каждого типа (1, 2, 3) при наличии в нем материи заполнено μ -вакуумом также определённого типа (1, 2, 3).

Так как для “орторепера” тензора энергии-импульса μ -вакуума все 3 пространственных вектора и 1 временной вектор одинаковы (равноправны все 4 направления), μ -вакуум представляет собой максимальную степень изотропии материи. Кроме того, так как пространства Эйнштейна однородны на всем своём протяжении и плотность материи в них везде постоянна [29], заполняющий их μ -вакуум не только обладает постоянной плотностью, но и является однородным. Итак, пространства Эйнштейна могут быть заполнены μ -вакуумом, обычным вакуумом ($T_{\alpha\beta} = 0$) или пустотой. Кроме того, в них могут существовать отдельные “острова” массы, также создающие кривизну. Поэтому пространства Эйнштейна 1-го типа наиболее полно соответствуют имеющимся сведениям о нашей Вселенной в целом. Таким образом, исследование геометрии нашей Вселенной и физических состояний заполняющей её материи на сегодняшний день сводится к исследованию пространств Эйнштейна 1-го типа. В своё время Петров доказал следующую теорему (см. §13 в его книге [29]):

Теорема Петрова

Всякое пространство постоянной кривизны есть пространство Эйнштейна $\langle \dots \rangle$ Пространства Эйнштейна 2-го типа и 3-го типа не могут быть пространствами постоянной кривизны.

Следовательно, пространства постоянной кривизны относятся к типу 1 по петровской классификации (пространства Эйнштейна). Если $K = 0$, то пространство Эйнштейна 1-го типа является плоским. Это ещё более упрощает задачу исследования вакуума и вакуумоподобных состояний материи в нашей Вселенной, так как на нынешний день мы имеем хорошо исследованные пространства постоянной кривизны. Это — *пространства де Ситтера* (или, иначе — пространства с метрикой де Ситтера).

В пространстве де Ситтера $T_{\alpha\beta} = 0$ и $\lambda \neq 0$, оно является сферически-симметричным, заполнено обычным вакуумом и не содержит “островов” вещества. Вместе с тем мы знаем, что средняя плотность материи в нашей Вселенной очень мала. Рассматривая её в целом, можно абстрагироваться от присутствия редких “островов” вещества и неоднородностей, локально нарушающих сферическую симметрию. Поэтому наше пространство в целом можно считать пространством де Ситтера с радиусом, равным радиусу Вселенной.

Теоретически пространства де Ситтера могут обладать как положительной кривизной $K > 0$, так и отрицательной кривизной $K < 0$. Анализ показывает (Дж. Л. Синг [35]), что в мире де Ситтера с $K < 0$ времениподобные геодезические линии являются замкнутыми: “. . . пробная частица снова и снова повторяет движение (свою историю) по той же самой траектории! Это $\langle . . . \rangle$ приводит к идеям, которые носят слишком уж “революционный” характер с точки зрения физики, в том виде, как она существует сегодня”. Поэтому большинство физиков (такие как Синг, Петров, Глинер и многие другие) не рассматривали пространство де Ситтера с отрицательной кривизной.

Напомним, что четырёхмерные римановы пространства с положительной кривизной — это обобщение обычной сферы, а пространства отрицательной кривизны — это обобщение пространства Лобачевского-Бойяи (сферы с мнимым радиусом). В интерпретации Пуанкаре пространства с отрицательной кривизной отображаются на внутреннюю поверхность сферы. Зельманов методами хронометрических инвариантов показал, что в псевдоримановом пространстве (метрика которого, как известно, знакопеременна) трёхмерная физическая наблюдаемая кривизна по знаку противоположна четырёхмерной кривизне. Судя по тому, что мы воспринимаем нашу планету как шар, наблюдаемая трёхмерная кривизна

нашего мира является положительной. Тогда гипотетические существа, живущие на “внутренней” поверхности Земли, воспринимают её как вогнутую, они живут в мире с отрицательной наблюдаемой кривизной.

Такое сравнение привело многих учёных к предположению о возможности существования зеркального двойника нашего мира — *зеркальной Вселенной*, населённой антиподами.

Первоначально считалось: если наш мир имеет положительную кривизну, то зеркальная Вселенная — это пространство с отрицательной кривизной. Однако Синг в главе 7 своей книги [35] показал, что в пространстве де Ситтера с положительной кривизной пространственноподобные геодезические траектории являются открытыми, тогда как в пространстве де Ситтера отрицательной кривизны они являются замкнутыми. Иначе говоря, пространство де Ситтера отрицательной кривизны не является зеркальной репликой пространства де Ситтера с положительной кривизной. Вместе с тем в наших предыдущих работах [19] (см. также §1.3 этой книги) мы обнаружили другой подход к концепции зеркальной Вселенной. При исследовании движения свободных частиц, ход времени которых противоположен ходу времени наблюдателя, оказалось, что наблюдаемой скалярной компонентой их четырёхмерного вектора импульса является отрицательная релятивистская масса. Причём зеркальность частиц по массе была получена нами как формальный результат проецирования четырёхмерного импульса на время и не связана с изменением знака кривизны пространства: частицы с прямым и обратным ходом времени могут существовать как в пространстве положительной кривизны, так и в пространстве с отрицательной кривизной.

Эти выводы, полученные геометрическими методами общей теории относительности, неизбежно влияют на представление о строении материи и космологии нашей Вселенной.

В §5.2 мы получим выражение для тензора энергии-импульса вакуума и, как следствие, выражение для его наблюдаемой плотности. Там же мы введём классификацию материи по виду тензора энергии-импульса (*T-классификация материи*). В §5.3 будут исследованы физические свойства вакуума в пространствах Эйнштейна 1-го типа, в частности, свойства вакуума в пространстве де Ситтера, и сделаны выводы о глобальной структуре нашей Вселенной.

Развивая эту линию, в §5.4 мы сформулируем концепцию происхождения и развития Вселенной в результате *инверсионного взрыва* из первочастицы с конкретными характеристиками. В §5.5 будет получено выражение для ньютоновской гравитационно-инерциальной силы, пропорциональной расстоянию. Параграфы 5.6 и 5.7 посвящены исследованию состояния коллапса в пространстве с метрикой Шварцшильда (гравитационный коллапс, *чёрная дыра*) и в пространстве с метрикой де Ситтера (инфляционный коллапс, *инфлянтон*).

5.2 Наблюдаемая плотность вакуума. Неньютоновская гравитация. Т-классификация материи

Уравнения Эйнштейна (уравнения поля в теории тяготения Эйнштейна) — это некоторые функции, связывающие кривизну пространства с распределением материи. В общем случае они имеют вид $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$. Левая часть, как известно, характеризует геометрию пространства, правая характеризует материю. При этом знак второго члена в правой части зависит от знака λ . Как мы сейчас увидим, знак λ , т.е. характер сил ньютоновской гравитации (отталкивание или притяжение), прямо связан со знаком плотности вакуума.

Итак, пространства Эйнштейна определяются соотношением $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$, для них уравнения поля имеют вид $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$. Такой вид уравнения поля могут иметь в двух случаях: 1) когда $T_{\alpha\beta} \neq 0$ (вещество); 2) когда $T_{\alpha\beta} = 0$ (вакуум). Но, так как в пространствах Эйнштейна, заполненных вакуумом, тензор энергии-импульса вещества равен нулю, он никак не может быть пропорциональным метрическому тензору, что противоречит определению пространства Эйнштейна ($T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$).

В чем тут дело? В отсутствие вещества (в вакууме) уравнения поля принимают вид $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = \lambda g_{\alpha\beta}$, т.е. вклад в кривизну поля вносит не вещество, а λ -поле (неньютоновские поля тяготения). В отсутствие вещества и λ -поля $R_{\alpha\beta} = 0$, т.е. пространство является пустым, но, вообще говоря, не является плоским. Получается, что λ -поле и вакуум — это фактически одно и то же, т.е. *вакуум представляет собой неньютоновские поля тяготения* (физическое определение вакуума). Соответственно, λ -силы являются проявлением собственного потенциала вакуума.

Это означает, что член $\lambda g_{\alpha\beta}$ из уравнений поля в вакууме выбрасывать нельзя, как бы мал он ни был, так как он характеризует вакуум, являющийся одной из причин искривления пространства. Тогда уравнения поля $R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (5.12)$$

где величина

$$\tilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \check{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} - \frac{\lambda}{\kappa} g_{\alpha\beta} \quad (5.13)$$

представляет собой тензор энергии-импульса, характеризующий как вещество, так и вакуум. Его первый член — это обычный тензор энергии-импульса вещества. Второй член

$$\check{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\kappa} g_{\alpha\beta} \quad (5.14)$$

является аналогом тензора энергии-импульса для вакуума.

Таким образом, так как пространства Эйнштейна могут быть заполнены вакуумом, их математическое определение лучше записывать в более общем виде, учитывающим наличие в пространстве не только вещества, но и вакуума (λ -поля): $\tilde{T}_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$. Это, в частности, позволит избежать противоречий при рассмотрении пустых пространств Эйнштейна.

Заметим, полученное выражение для тензора энергии-импульса вакуума (5.14) является прямым следствием уравнений поля в общем виде.

Если $\lambda > 0$ (неньютоновские силы представляют собой силы отталкивания), то наблюдаемая плотность вакуума получается отрицательной

$$\check{\rho} = \frac{\check{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\kappa} = -\frac{|\lambda|}{\kappa} < 0, \quad (5.15)$$

тогда как при $\lambda < 0$ (силы неньютоновской гравитации являются силами притяжения) наблюдаемая плотность вакуума, наоборот, положительна

$$\check{\rho} = \frac{\check{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\kappa} = \frac{|\lambda|}{\kappa} > 0. \quad (5.16)$$

Последнее, как мы увидим в следующем параграфе, для нас имеет существенное значение, так как пространство де Ситтера с

$\lambda < 0$, представляющее собой пространство постоянной отрицательной (четырёхмерной) кривизны, заполненное только вакуумом (без вещества), наиболее полно соответствует наблюдательным данным о нашей Вселенной в целом.

Итак, основываясь на исследованиях Петрова и Глинера, а также учитывая наше замечание относительно наличия у вакуума (λ -поля) собственного тензора энергии-импульса и, как следствие, физических свойств, мы предлагаем “геометрическую” классификацию состояний материи по тензору энергии-импульса. Мы будем называть это *Т-классификацией материи*:

- I) пустота: $T_{\alpha\beta} = 0$ и $\lambda = 0$ (пространство-время без материи), уравнения поля имеют вид $R_{\alpha\beta} = 0$;
- II) физический вакуум (или просто, вакуум): $T_{\alpha\beta} = 0$, $\lambda \neq 0$ (образован λ -полем), а уравнения поля имеют вид $G_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$;
- III) μ -вакуум: $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$ и $\mu = const$ (вакуумоподобное состояние вещества), уравнения поля имеют вид $G_{\alpha\beta} = -\kappa \mu g_{\alpha\beta}$;
- IV) вещество: $T_{\alpha\beta} \neq 0$ и $T_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}$ (это состояние включает как обычное вещество, так и электромагнитное поле).

В общем случае тензор энергии-импульса вещества (тип IV по Т-классификации) не пропорционален метрическому тензору. Вместе с тем есть и такие состояния вещества, при которых тензор энергии-импульса содержит член, пропорциональный метрическому тензору, но, так как там есть и другие члены, — это не μ -вакуум. Таковы, например, идеальная жидкость

$$T_{\alpha\beta} = \left(\rho - \frac{p}{c^2}\right) U_\alpha U_\beta - \frac{p}{c^2} g_{\alpha\beta}, \quad (5.17)$$

и электромагнитное поле

$$T_{\alpha\beta} = F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} g_{\alpha\beta} - F_{\alpha\sigma} F_\beta^{\sigma}, \quad (5.18)$$

где $F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ первый инвариант электромагнитного поля (3.27), $F_{\alpha\beta}$ тензор Максвелла, p давление жидкости. Если $p = \rho c^2$ (вещество внутри атомных ядер) и $p = const$, тензор энергии-импульса идеальной жидкости, казалось бы, может стать пропорциональным метрическому тензору. Однако, как будет показано в следующем параграфе, уравнение состояния μ -вакуума имеет принципиально другой вид $p = -\rho c^2$ (состояние инфляции, при положительной плотности

— расширение). Следовательно, давление и плотность в атомных ядрах должны быть непостоянными, чтобы препятствовать переходу внутриядерного вещества в вакуумоподобное состояние.

В данной Т-классификации, как и в уравнениях поля, идёт речь только о *распределённой материи*, влияющей на кривизну пространства, а не о пробных частицах — материальных точках, собственные массы которых настолько малы, что их воздействием на кривизну пространства можно пренебречь. Поэтому понятие тензора энергии-импульса не определено для частиц, их следует рассматривать вне данной Т-классификации. Так, например, в нашей книге [19] предметом исследования являются 3 вида частиц, каждому из которых соответствует свой тип пространственно-временных траекторий, однако сами частицы рассматриваются как “шарики” (или волны), бегущие по “бугристому” фону базового пространства и никак не влияющие на его геометрическую структуру.

5.3 Физические свойства вакуума. Космология

Пространства Эйнштейна определяются уравнениями поля вида $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$, где $k = const$. При $\lambda \neq 0$ и $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$ пространство заполнено материей, тензор энергии-импульса которого пропорционален метрическому тензору, т.е. μ -вакуумом. Для вакуума тензор энергии-импульса, как мы убедились в §5.2, также пропорционален метрическому тензору. Это означает, что физические свойства вакуума и μ -вакуума в принципе одинаковы, разница лишь в скалярном коэффициенте, определяющем состав материи (λ -поле или вещество) и величине действующих сил. Поэтому мы будем рассматривать пространство Эйнштейна, заполненное вакуумом и μ -вакуумом. В этом случае уравнения поля принимают вид

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -(\kappa\mu - \lambda) g_{\alpha\beta}. \quad (5.19)$$

Записывая их в смешанном виде и затем свёртывая, находим скалярную кривизну

$$R = 4(\kappa\mu - \lambda), \quad (5.20)$$

подставляя которую в исходные уравнения (5.19), получаем уравнения поля в окончательном виде

$$R_{\alpha\beta} = (\kappa\mu - \lambda) g_{\alpha\beta}, \quad (5.21)$$

где $\varkappa\mu - \lambda = \text{const} = k$.

Теперь исследуем физические свойства вакуума и μ -вакуума. Вычислим х.и.-компоненты тензора энергии-импульса: наблюдаемую плотность материи $\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}$, вектор наблюдаемой плотности импульса $J^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}}$, наблюдаемый тензор напряжений $U^{ik} = c^2 T^{ik}$.

Для μ -вакуума ($T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$) физически наблюдаемые компоненты тензора энергии-импульса имеют вид

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \mu, \quad (5.22)$$

$$J^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad (5.23)$$

$$U^{ik} = c^2 T^{ik} = -\mu c^2 h^{ik} = -\rho c^2 h^{ik}. \quad (5.24)$$

Для тензора энергии-импульса $\check{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\varkappa} g_{\alpha\beta}$ (5.14), который характеризует вакуум (физический вакуум), физически наблюдаемые компоненты имеют следующий вид

$$\check{\rho} = \frac{\check{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa}, \quad (5.25)$$

$$\check{J}^i = \frac{c \check{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad (5.26)$$

$$\check{U}^{ik} = c^2 \check{T}^{ik} = \frac{\lambda}{\varkappa} c^2 h^{ik} = -\check{\rho} c^2 h^{ik}. \quad (5.27)$$

Отсюда видно: вакуум (λ -поле) и μ -вакуум обладают постоянной плотностью (т.е. представляют собой *однородно распределённую материю*), а также являются *неизлучающими средами* (так как в них поток энергии $c^2 J^i$ равен нулю)

$$c^2 \check{J}^i = \frac{c^3 \check{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad c^2 J^i = \frac{c^3 T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0. \quad (5.28)$$

В системе координат, сопутствующей среде, тензор напряжений выглядит следующим образом [11–13]

$$U_{ik} = p_0 h_{ik} - \alpha_{ik} = p h_{ik} - \beta_{ik}, \quad (5.29)$$

где p_0 равновесное давление, определяемое из уравнения состояния, p истинное давление, α_{ik} вязкость 2-го рода (тензор вязких напряжений), и $\beta_{ik} = \alpha_{ik} - \frac{1}{3} \alpha h_{ik}$ его анизотропная часть (вязкость 1-го рода, проявляющаяся при анизотропной деформации), где $\alpha = \alpha_i^i$ след тензора вязкости 2-го рода α_{ik} .

Записывая тензор напряжений μ -вакуума (5.24) в системе отсчёта, сопутствующей самому μ -вакууму, получаем

$$U_{ik} = p h_{ik} = -\rho c^2 h_{ik}, \quad (5.30)$$

аналогично для тензора напряжений вакуума (5.27)

$$\check{U}_{ik} = \check{p} h_{ik} = -\check{\rho} c^2 h_{ik}. \quad (5.31)$$

Отсюда следует, что вакуум и μ -вакуум являются невязкими средами ($\alpha_{ik} = 0, \beta_{ik} = 0$) уравнения которых*

$$\check{p} = -\check{\rho} c^2, \quad p = -\rho c^2. \quad (5.32)$$

Такое состояние материи называют *инфляцией* (инфляция — раздувание), так как при положительной плотности материи давление получается отрицательным, среда расширяется.

Таковы основные физические свойства вакуума и μ -вакуума: это — однородные ($\rho = const$), невязкие ($\alpha_{ik} = \beta_{ik} = 0$) и неизлучающие ($J^i = 0$) среды, находящиеся в состоянии инфляции.

Теперь перейдём к исследованию вакуума, заполняющего пространства постоянной кривизны, в частности, пространство де Ситтера, лучше всего соответствующее пространству нашей Вселенной в целом. В пространстве постоянной кривизны тензор Римана-Кристоффеля имеет вид (см. главу 7 в книге Синга [35])

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K (g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}), \quad K = const, \quad (5.33)$$

свёртывая который мы получаем выражение для тензора Риччи $R_{\alpha\beta}$ и скалярную кривизну R в пространстве постоянной кривизны

$$R_{\alpha\beta} = -3K g_{\alpha\beta}, \quad R = -12K. \quad (5.34)$$

*Уравнение состояния распределённой материи — это зависимость её давления от плотности. Например, $p = 0$ уравнение состояния пылевой среды, $p = \rho c^2$ уравнение состояния материи в атомных ядрах, $p = \frac{1}{3} \rho c^2$ уравнение состояния ультрарелятивистского газа.

Представляя пространство нашей Вселенной как пространство постоянной кривизны, получаем уравнения поля, выраженные через кривизну

$$3K g_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (5.35)$$

Запишем их, как и Синг, в виде $(\lambda - 3K) g_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$. Тогда тензор энергии-импульса вещества в пространствах постоянной кривизны имеет вид

$$T_{\alpha\beta} = \frac{\lambda - 3K}{\kappa} g_{\alpha\beta}. \quad (5.36)$$

Отсюда, в частности, видно, что в пространстве постоянной кривизны сама собой решается проблема геометризации материи: тензор энергии-импульса (5.36) выражается только через метрический тензор и константы. Пространство де Ситтера — это пространство постоянной кривизны, в котором $T_{\alpha\beta} = 0$ и $\lambda \neq 0$, т.е. оно заполнено только вакуумом (вещество в нем отсутствует). Тогда, приравнивая тензор энергии-импульса вещества (5.36) к нулю, получаем, как и Синг: в пространстве де Ситтера $\lambda = 3K$.

С учётом этого соотношения, выражение для наблюдаемой плотности вакуума в мире де Ситтера принимает вид

$$\rho = -\frac{\lambda}{\kappa} = -\frac{3K}{\kappa} = -\frac{3Kc^2}{8\pi G}. \quad (5.37)$$

Теперь мы подходим к ключевому вопросу: каков знак четырёхмерной кривизны пространства нашей Вселенной? Вопрос, увы, не праздный. От ответа на него зависит фактически, сойдётся ли построенная космология мира де Ситтера с наблюдательными данными или получится результат, прямо противоположный общеизвестным астрономическим фактам.

Действительно, при положительной четырёхмерной кривизне $K > 0$ плотность вакуума получается отрицательной, следовательно инфляционное давление больше нуля — вакуум сжимается. Тогда, так как $\lambda > 0$, ньютоновские силы гравитации являются силами отталкивания. Получается противоборство двух начал: инфляционного положительного давления вакуума, стремящегося сжать пространство, и сил ньютоновской гравитации, являющихся силами отталкивания. При этом, во-первых, так как λ -силы пропорциональны расстоянию, их расширяющее действие усиливалось бы с

увеличением радиуса Вселенной: расширение Вселенной происходило бы с ускорением. И, во-вторых, если бы Вселенная когда-то была размером меньше расстояния, на котором сжимающее давление вакуума равно растягивающему действию λ -сил, её расширение стало бы невозможным.

Если четырёхмерная кривизна отрицательна $K < 0$, плотность вакуума получается положительной, его инфляционное давление меньше нуля — вакуум расширяется. Кроме того, так как в этом случае $\lambda < 0$, ньютоновские силы гравитации являются силами притяжения. Тогда Вселенная может расширяться практически из точки до тех пор, пока плотность вакуума не уменьшится до такой степени, что его расширяющее давление станет равным ньютоновским λ -силам притяжения.

Таким образом, вопрос знака кривизны является решающим для космологии нашей Вселенной.

Однако человеческое восприятие трёхмерно, поэтому обычный наблюдатель не в состоянии что-либо узнать о знаке четырёхмерной кривизны путём прямых измерений. Как быть в таком случае? Выход из создавшейся ситуации даёт теория хронометрических инвариантов — метод для определения физических наблюдаемых величин.

Одной из своих задач Зельманов считал построение тензора кривизны трёхмерного, вообще говоря, неголономного пространства, который обладал бы свойствами тензора кривизны Римана-Кристоффеля и, одновременно, обладал бы свойством хронометрической инвариантности. Он решил построить такой тензор по аналогии с тензором Римана-Кристоффеля, который получается как результат некоммутативности вторых производных от произвольного вектора в рассматриваемом пространстве. Вычисляя разность вторых хронометрических инвариантных производных от произвольного трёхмерного вектора, он получил выражение

$${}^* \nabla_i {}^* \nabla_k Q_l - {}^* \nabla_k {}^* \nabla_i Q_l = \frac{2A_{ik}}{c^2} \frac{{}^* \partial Q_l}{\partial t} + H_{lki}^{\dots j} Q_j, \quad (5.38)$$

которое содержит х.и.-тензор

$$H_{lki}^{\dots j} = \frac{{}^* \partial \Delta_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{{}^* \partial \Delta_{kl}^j}{\partial x^i} + \Delta_{il}^m \Delta_{km}^j - \Delta_{kl}^m \Delta_{im}^j, \quad (5.39)$$

аналогичный тензору Схоутена из теории неголономных многообразий*. В общем случае, когда пространство вращается ($A_{ik} \neq 0$), тензор $H_{lki}^{\dots j}$ отличается по своим алгебраическим свойствам от тензора Римана-Кристоффеля. Поэтому Зельманов ввёл тензор

$$C_{lkij} = \frac{1}{4} (H_{lkij} - H_{jkil} + H_{klji} - H_{iljk}), \quad (5.40)$$

не только являющийся хронометрически инвариантным, но ещё и обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора Римана-Кристоффеля на пространственном сечении, связанном с наблюдателем (т.е. в его пространстве отсчёта). Таким образом, тензор C_{lkij} является тензором кривизны трёхмерного пространства отсчёта наблюдателя, сопутствующего своему телу отсчёта. Свёртывая его, получаем х.и.-величины

$$C_{kj} = C_{kij}^{\dots i} = h^{im} C_{kimj}, \quad C = C_j^j = h^{lj} C_{lj}, \quad (5.41)$$

которые также характеризуют кривизну трёхмерного пространства. Так как C_{lkij} , C_{kj} , и C обладают свойством хронометрической инвариантности, они являются физически наблюдаемыми величинами.

В частности, C представляет собой *трёхмерную наблюдаемую кривизну* [11–13].

Применительно к нашему исследованию свойств вакуума и космологии, нас интересует, как трёхмерная наблюдаемая кривизна C связана с четырёхмерной кривизной K вообще и в пространстве де Ситтера, в частности. Рассмотрим эту задачу последовательно. Четырёхмерный тензор кривизны Римана-Кристоффеля является тензором 4-го ранга, поэтому он имеет $n^4 = 256$ компонент, из которых существенными являются лишь 20. Остальные компоненты либо равны нулю, либо выражаются друг через друга, так как тензор Римана-Кристоффеля является:

- 1) симметричным по каждой паре индексов $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}$;
- 2) антисимметричным относительно перестановок внутри каждой пары индексов $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}$, $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}$;

*И. А. Схоутен построил теорию неголономных многообразий для произвольного числа измерений, рассматривая подпространство с размерностью m в пространстве размерности n , где $m < n$ [36]. Применительно к теории хронометрических инвариантов фактически рассматривается подпространство размерности ($m = 3$) в пространстве с размерностью ($n = 4$).

- 3) его компоненты связаны соотношением $R_{\alpha(\beta\gamma\delta)} = 0$, где круглые скобки обозначают перестановки по индексам (β, γ, δ) .

Существенные компоненты тензора Римана-Кристоффеля образуют три физических наблюдаемых х.и.-тензора

$$X^{ik} = -c^2 \frac{R_{0 \cdot 0 \cdot}^{i \cdot k}}{g_{00}}, \quad Y^{ijk} = -c \frac{R_{0 \dots}^{ijk}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad Z^{ijkl} = c^2 R^{ijkl}. \quad (5.42)$$

Тензор X^{ik} имеет 6 компонент, тензор Y^{ijk} имеет 9 компонент, а у тензора Z^{ijkl} (в силу его симметрии) 6 компонент. Компоненты второго тензора связаны соотношением $Y_{(ijk)} = Y_{ijk} + Y_{jki} + Y_{kij} = 0$. Выражая эти три величины через х.и.-характеристики пространства отсчёта и затем опуская индексы, получаем

$$X_{ij} = \frac{* \partial D_{ij}}{\partial t} - (D_i^l + A_i^l)(D_{jl} + A_{jl}) + (* \nabla_i F_j + * \nabla_j F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_j, \quad (5.43)$$

$$Y_{ijk} = * \nabla_i (D_{jk} + A_{jk}) - * \nabla_j (D_{ik} + A_{ik}) + \frac{2}{c^2} A_{ij} F_k, \quad (5.44)$$

$$Z_{iklj} = D_{ik} D_{lj} - D_{il} D_{kj} + A_{ik} A_{lj} - A_{il} A_{kj} + 2A_{ij} A_{kl} - c^2 C_{iklj}. \quad (5.45)$$

Отсюда видно, что пространственные наблюдаемые компоненты Z_{iklj} тензора Римана-Кристоффеля (5.45) непосредственно связаны с х.и.-тензором трёхмерной наблюдаемой кривизны C_{iklj} пространства.

Теперь найдём выражение для трёхмерной наблюдаемой кривизны в пространстве, кривизна которого постоянна (такого как, например, пространство де Ситтера). В этом случае тензор Римана-Кристоффеля имеет вид (5.33), тогда

$$R_{0i0k} = -K h_{ik} g_{00}, \quad (5.46)$$

$$R_{0ijk} = \frac{K}{c} \sqrt{g_{00}} (v_j h_{ik} - v_k h_{ij}), \quad (5.47)$$

$$R_{ijkl} = K \left[h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{kj} + \frac{1}{c^2} v_i (v_l h_{kj} - v_k h_{jl}) + \frac{1}{c^2} v_j (v_k h_{il} - v_l h_{ik}) \right]. \quad (5.48)$$

Вычисляя его физически наблюдаемые х.и.-компоненты (5.42), получаем

$$X^{ik} = c^2 K h^{ik}, \quad Y^{ijk} = 0, \quad Z^{ijkl} = c^2 K (h^{ik} h^{jl} - h^{il} h^{jk}). \quad (5.49)$$

Соответственно, выражение для пространственных наблюдаемых компонент с нижними индексами будет иметь вид

$$Z_{ijkl} = c^2 K (h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}). \quad (5.50)$$

Последовательно свёртывая эту величину, получаем

$$Z_{jl} = Z^{i\cdots}_{:jil} = 2c^2 K h_{jl}, \quad Z = Z^j_j = 6c^2 K. \quad (5.51)$$

С другой стороны, нам известно выражение для Z_{ijkl} в пространстве произвольно кривизны (5.45), содержащее тензор трёхмерной наблюдаемой кривизны в явном виде. Очевидно, что оно справедливо и для случая $K = const$. Тогда, последовательно свёртывая общее выражение (5.45), имеем

$$Z_{il} = D_{ik} D_l^k - D_{il} D + A_{ik} A_l^k + 2A_{ik} A_l^k - c^2 C_{il}, \quad (5.52)$$

$$Z = h^{il} Z_{il} = D_{ik} D^{ik} - D^2 - A_{ik} A^{ik} - c^2 C. \quad (5.53)$$

В пространстве постоянной кривизны $Z = 6c^2 K$ (5.51), следовательно, связь между четырёхмерной кривизной пространства K и трёхмерной наблюдаемой кривизной C имеет вид

$$6c^2 K = D_{ik} D^{ik} - D^2 - A_{ik} A^{ik} - c^2 C. \quad (5.54)$$

Отсюда видно, что в отсутствии вращения и деформации пространства четырёхмерная кривизна по знаку противоположна трёхмерной наблюдаемой кривизне. В пространстве де Ситтера, где отсутствуют вращение и деформация,

$$K = -\frac{1}{6} C, \quad (5.55)$$

т.е. трёхмерная наблюдаемая кривизна $C = -6K$.

Теперь мы можем определить реальную модель развития нашей Вселенной, опираясь на два источника опытных фактов: 1) знак наблюдаемой плотности материи; 2) знак наблюдаемой трёхмерной кривизны.

Во-первых, повседневный опыт свидетельствует: плотность материи в нашей Вселенной положительна, и, какой бы разреженной материя ни становилась, её плотность всё равно остаётся больше нуля. Тогда, чтобы плотность вакуума (5.37) была положительной, космологический член должен иметь отрицательный знак (в этом случае силы ньютоновской гравитации являются силами притяжения) и, соответственно, четырёхмерная кривизна должна быть отрицательной $K < 0$.

Во-вторых, судя по тому, что мы воспринимаем планеты и звёзды как шары, создаваемая их массами наблюдаемая трёхмерная кривизна положительна $C > 0$, т.е. $K < 0$ и $\lambda < 0$ (в случае отрицательной наблюдаемой кривизны мы воспринимали бы горизонт, в том числе и горизонт событий, вогнутым). Кроме того, как пишет Иваненко во вступительной статье к книге Вебера [28]:

“Хотя данные космологических наблюдений, естественно, не точны, но, например, Мак-Витти* утверждает, что наилучшие результаты наблюдений хаббловского красного смещения $H \approx 75$ км/сек мегапарсек и средней плотности материи $\rho \approx 10^{-31}$ грамм/см³ говорят в пользу исчезающего космологического члена с $\lambda < 0$.”

В итоге можно считать, что плотность вакуума в нашей Вселенной положительна, и трёхмерная кривизна $C > 0$. Следовательно, четырёхмерная кривизна $K < 0$ и, соответственно, космологический член $\lambda < 0$. Тогда из выведенной нами формулы (5.37) получаем наблюдаемую плотность вакуума в нашей Вселенной, выраженную через наблюдаемую трёхмерную кривизну

$$\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\kappa} = -\frac{3K}{\kappa} = \frac{C}{2\kappa} > 0, \quad (5.56)$$

т.е. инфляционное давление вакуума $\check{p} = -\check{\rho}c^2$ является отрицательным (вакуум расширяется). При этом, поскольку одним из физических свойств вакуума является его однородное распределение в пространстве, отрицательное инфляционное давление означает также расширение Вселенной в целом.

Таким образом, наблюдаемое трёхмерное пространство нашей Вселенной ($C > 0$) представляется нам в виде трёхмерной разду-

* См. [37] в нашем списке литературы.

вающейся сферы, являющейся подпространством четырёхмерного пространства-времени $K < 0$ (пространства, геометрия которого является обобщением геометрии Лобачевского-Бойяи).

Иначе говоря, наблюдаемая геометрия трёхмерного пространства в целом является обобщением геометрии Римана, а геометрия четырёхмерного пространства-времени представляет собой обобщение геометрии Лобачевского-Бойяи.

Конечно, рассмотренное нами пространство де Ситтера — лишь какое-то приближение пространства нашей Вселенной: хотя “острова” тяготеющих масс чрезвычайно редки и не влияют на глобальную кривизну, в своих ближайших окрестностях их влияние на кривизну пространства существенно (отклонение лучей света в поле тяготения Солнца и другие эффекты). Однако при исследовании Вселенной в целом, редкими “островами” вещества и локальными неоднородностями кривизны можно пренебречь. В таком случае пространство де Ситтера с отрицательной четырёхмерной кривизной (наблюдаемая трёхмерная кривизна положительна) можно считать фоновым пространством нашей Вселенной.

5.4 Концепция инверсионного взрыва Вселенной

Из предыдущего параграфа мы знаем: в пространстве де Ситтера $\lambda = 3K$, т.е. λ -член по своему физическому смыслу — то же самое, что и кривизна. Для трёхмерного сферического подпространства наблюдаемая кривизна $C = -6K$ равна

$$C = \frac{1}{R^2}, \quad (5.57)$$

где R наблюдаемый радиус кривизны (радиус сферы). Тогда четырёхмерная кривизна пространства-времени

$$K = -\frac{1}{6R^2}, \quad (5.58)$$

т.е. чем больше радиус сферы, тем меньше кривизна K .

По оценкам астрономов, наша Вселенная возникла 10–20 миллиардов лет назад. Следовательно, расстояние пройденное фотоном (квантом света), родившимся в начале жизни Вселенной, на нынешний день равно $R_H \approx 10^{27} - 10^{28}$ см. Это расстояние называется *радиусом горизонта событий*. Полагая нашу Вселенную в

целом миром де Ситтера с $K < 0$ для четырёхмерной кривизны и, соответственно, для λ -члена $\lambda = 3K$, получаем оценку

$$K = -\frac{1}{6R_H^2} \approx -10^{-56} \text{ см}^{-2}. \quad (5.59)$$

Вместе с тем, схожие значения горизонта событий, кривизны и λ -члена можно получить из работ Роберто ди Бартини [38, 39], исследовавшего соотношения между физическими константами с точки зрения топологии.

В работах ди Бартини радиус Вселенной интерпретируется как наибольшая протяжённость, определяемая из топологических соображений. Согласно *инверсионному соотношению ди Бартини*

$$\frac{R\rho}{r^2} = 1, \quad (5.60)$$

космический радиус R (наибольшая протяжённость пространства) является инверсионным образом гравитационного радиуса электрона $\rho = 1,347 \times 10^{-55}$ см (наименьшая протяжённость) относительно радиуса сферической инверсии $r = 2,818 \times 10^{-13}$ см, равного классическому радиусу электрона (по ди Бартини — радиус сферической инверсии). Численно космический радиус (предельно большой радиус горизонта событий) равен [38, 39]

$$R = 5,895 \times 10^{29} \text{ см}. \quad (5.61)$$

Космическая масса (масса под космическим радиусом) и *космическая плотность*, также определяемые из топологических соображений [38, 39], составляют

$$M = 3,986 \times 10^{57} \text{ грамм}, \quad \rho = 9,87 \times 10^{-34} \text{ грамм/см}^3. \quad (5.62)$$

Фактически, из работ ди Бартини следует, что пространство Вселенной (от классического радиуса электрона до горизонта событий) является внешним инверсионным образом внутреннего пространства некоей частицы размером с электрон (её радиус лежит в пределах от классического радиуса электрона до его гравитационного радиуса). В остальном эта частица отличается от электрона: её масса равна космической массе $M = 3,986 \times 10^{57}$ грамм, тогда как масса электрона $m = 9,11 \times 10^{-28}$ грамм.

Пространство внутри этой частицы непредставимо пространством де Ситтера. Действительно, если определить плотность вакуума в пространстве де Ситтера с $K < 0$ и наблюдаемым радиусом кривизны $r = 2,818 \times 10^{-13}$ см, мы получим

$$\check{\rho} = -\frac{3K}{\varkappa} = -\frac{1}{2\varkappa} r^2 = 3,39 \times 10^{51} \text{ грамм/см}^3, \quad (5.63)$$

тогда как плотность материи внутри частицы ди Бартини, вычисляемая как плотность внутри сферы, составляет

$$\rho = \frac{M}{2\pi^2 r^3} = 9,03 \times 10^{93} \text{ грамм/см}^3. \quad (5.64)$$

Вместе с тем внешнее пространство, являющееся инверсионным образом внутреннего, по характеристикам подходит под пространство де Ситтера. Представим, что пространство с радиусом кривизны, равным космическому радиусу ди Бартини $R = 5,895 \times 10^{29}$ см, является пространством де Ситтера с $K < 0$. В этом случае четырёхмерная кривизна и λ -член равны

$$K = -\frac{1}{6R^2} = -4,8 \times 10^{-61} \text{ см}^{-2}, \quad (5.65)$$

$$\lambda = 3K = -\frac{1}{2R^2} = -14,4 \times 10^{-61} \text{ см}^{-2}, \quad (5.66)$$

т.е. на пять порядков меньше наблюдаемой оценки $|\lambda| < 10^{-56}$. Это можно объяснить тем, что, так как Вселенная продолжает расширяться, в будущем абсолютные значения её кривизны и космологического члена уменьшатся, приближаясь к значениям (5.65, 5.66), вычисленным для наибольшей протяжённости (космического радиуса). Расчётная плотность вакуума в пространстве де Ситтера под космическим радиусом

$$\check{\rho} = -\frac{3K}{\varkappa} = -\frac{3Kc^2}{8\pi G} \approx 7,7 \times 10^{-34} \text{ грамм/см}^3 \quad (5.67)$$

также меньше наблюдаемой средней плотности материи во Вселенной ($5-10 \times 10^{-30}$ грамм/см³) и фактически почти совпадают с плотностью материи в пространстве внутри космического радиуса по ди Бартини $9,87 \times 10^{-34}$ грамм/см³ (5.62).

Выяснить, сколько ещё наша Вселенная будет расширяться, можно, определив, насколько наблюдаемый радиус горизонта событий R_H ещё не достиг радиуса кривизны R . Полагая предельный радиус горизонта событий Вселенной $R_{H(\max)}$ равным космическому радиусу (внешней инверсионной протяжённости) по ди Бартини $R = R_{H(\max)} = 5,895 \times 10^{29}$ см (5.61), и, сравнивая его с оценкой наблюдаемого радиуса горизонта событий ($R_H \approx 10^{27} - 10^{28}$ см), получаем $\Delta R = R_{H(\max)} - R_H \approx 5,8 \times 10^{29}$ см, т.е. нашей Вселенной осталось расширяться

$$t = \frac{\Delta R}{c} \approx 600 \text{ миллиардов лет.} \quad (5.68)$$

Эти расчёты плотности вакуума и других характеристик пространства де Ситтера позволяют сделать выводы о происхождении и эволюции нашей вселенной и допускают единственную интерпретацию инверсионного соотношения ди Бартини. Назовём её *космологической концепцией Инверсионного Взрыва Вселенной*. При этом напомним, что наши расчёты характеристик пространства де Ситтера основаны только на геометрических методах общей теории относительности, а инверсионное соотношение ди Бартини (5.60) является очевидным следствием современных знаний о физических константах. Итак. . .

. . . Вначале существовала единственная прачастица с радиусом, равным классическому радиусу электрона, и массой, равной массе всей Вселенной.

Затем произошёл инверсионный взрыв: в результате топологического перехода материя внутреннего пространства прачастицы инверсировалась относительно её поверхности во внешний мир, образуя нашу расширяющуюся Вселенную. На нынешний день, спустя 10–20 млрд. лет после инверсионного взрыва, Вселенная находится в ранней стадии эволюции. Её расширение продлится ещё почти 600 млрд. лет.

Спустя этот срок расширяющееся пространство достигнет своего радиуса кривизны, на котором ньютоновские силы гравитации, пропорциональные расстоянию, уравновесят инфляционное расширяющее давление вакуума. Расширение Вселенной прекратится, наступит устойчивое состояние, которое продлится вплоть до следующего инверсионного топологического перехода. . .

Стадии эволюции	Возраст, лет	Радиус, см	Плотность, грамм/см^3	λ -член, см^{-2}
Прачастица (до взрыва)	0	$2,82 \times 10^{-13}$	$9,03 \times 10^{93}$?
В нашу эпоху	$10-20 \times 10^9$	$10^{27}-10^{28}$	$5-10 \times 10^{-30}$	$< 10^{-56}$
После расширения	623×10^9	$5,89 \times 10^{29}$	$9,87 \times 10^{-34}$	$1,44 \times 10^{-60}$

Таблица 5.1: Параметры материи и пространства на разных стадиях эволюции Вселенной, согласно космологической концепции Инверсионного Взрыва Вселенной из пра-частицы.

Параметры материи и пространства на разных стадиях эволюции Вселенной приведены в таблице 5.1.

Причины топологического перехода, приведшего к сферической инверсии материи из прачастицы (инверсионному взрыву пра-частицы), неизвестны. . . впрочем, как и причины “начала” Вселенной в других современных космологических концепциях.

5.5 Ньютонские гравитационные силы

Пространства Эйнштейна 1-го типа, в том числе и пространства постоянной кривизны, помимо включений в виде “островов” вещества, могут быть как пустыми, так и заполненными однородной материей. Однако существует принципиальное различие между пустым пространством Эйнштейна 1-го типа (кривизна $K = 0$) и непустым ($K = \text{const} \neq 0$).

Чтобы наши рассуждения были более конкретными, обратимся к наиболее характерным примерам пустого и непустого пространства Эйнштейна 1-го типа.

Если остров массы представляет собой шар (сферически симметричное распределение массы в острове), помещённый в пустоту, то кривизну такого пространства создаёт ньютоновское поле тяготения острова, и оно не является пространством постоянной кривизны. При удалении от острова на бесконечность пространство становится плоским, т.е. пространством постоянной кривизны с $K = 0$. Характерным примером поля тяготения, создаваемого сферически-симметричным островом массы в пустоте, является

поле, описываемое метрикой Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5.69)$$

где r расстояние от острова, r_g его гравитационный радиус.

В пространстве с метрикой Шварцшильда нет вращения и деформации. Компоненты вектора гравитационно-инерциальной силы (1.38) вычисляются следующим образом. Судя по метрике (5.69), величина g_{00} имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (5.70)$$

тогда производная от потенциала $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$ по координате x^i , равна

$$\frac{\partial w}{\partial x^i} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (5.71)$$

Подставляя эту производную в выражение для гравитационно-инерциальной силы (1.38), в отсутствие вращения имеем

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad F^1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}, \quad (5.72)$$

таким образом, вектор F^i в пространстве с метрикой Шварцшильда характеризует ньютоновскую гравитационную силу, которая обратно пропорциональна квадрату расстояния r от тяготеющей массы (источника поля).

Если пространство *заполнено* сферически симметричным распределением вакуума и не включает островов массы, его кривизна будет везде одинаковой. Пример такого поля тяготения — поле, описываемое метрикой де Ситтера*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.73)$$

* Согласно последним исследованиям [40], метрика де Ситтера (5.73) отвечает условию сферической симметрии только в предельном случае, когда $\lambda = 0$, тогда как в общем случае ($\lambda \neq 0$) пространство де Ситтера является сферически симметричным только если оно имеет нулевой объём (т.е. вырождается в точку) или при других частных условиях.

Заметим, что хотя в пространстве де Ситтера нет островов вещества, создающих обычные ньютоновские поля тяготения, мы можем рассматривать движение малых (пробных) частиц, собственные ньютоновские поля которых настолько малы, что ими можно пренебречь.

Пространство с метрикой де Ситтера представляет собой пространство постоянной кривизны, превращающееся в плоское пространство только в отсутствии λ -поля. Вращение и деформация в нем также отсутствуют, а компоненты вектора гравитационно-инерциальной силы имеют вид

$$F_1 = \frac{\lambda c^2}{3} \frac{r}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}, \quad F^1 = \frac{\lambda c^2}{3} r, \quad (5.74)$$

т.е. вектор F^i в пространстве де Ситтера характеризует неньютоновские гравитационные силы, пропорциональные r : если $\lambda < 0$, это будут силы притяжения, если $\lambda > 0$, то силы отталкивания. Таким образом, силы неньютоновской гравитации (λ -силы) тем сильнее, чем больше расстояние, на котором они действуют.

Таким образом, мы видим принципиальное различие между пустым и непустым пространствами Эйнштейна 1-го типа: в пустом острове массы действуют только ньютоновские силы, в заполненном вакуумом без островов массы — только силы неньютоновской гравитации.

Примером “смешанного” пространства 1-го типа является пространство с метрикой Коттлера [41]

$$\left. \begin{aligned} ds^2 = & \left(1 + \frac{ar^2}{3} + \frac{b}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 + \frac{ar^2}{3} + \frac{b}{r}} - \\ & r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \end{aligned} \right\}, \quad (5.75)$$

$$F_1 = -c^2 \frac{\frac{ar}{3} - \frac{b}{2r^2}}{1 + \frac{ar^2}{3} + \frac{b}{r}}, \quad F^1 = -c^2 \left(\frac{ar}{3} - \frac{b}{2r^2} \right)$$

в котором действуют как ньютоновские силы, так и λ -силы: оно заполнено вакуумом и включает островные массы, создающие ньютоновские силы тяготения. Вместе с тем, Коттлер вывел свою метрику с точностью до двух констант a и b , для определения которых

требуется задавать какие-то дополнительные условия. Поэтому, несмотря на привлекательность метрики Коттлера, практический интерес представляют лишь два её “крайних” случая — метрика Шварцшильда (ньютоновские силы тяготения) и метрика де Ситтера (λ -силы).

5.6 Гравитационный коллапс

Конечно, представляя нашу Вселенную как пространство де Ситтера (заполненное вакуумом без “островов” массы), или как пространство Шварцшильда (“острова” массы в пустоте), мы делаем некоторое допущение. Реальная метрика нашего мира представляет собой нечто “среднее”. Тем не менее, при решении задач, связанных с действием сил неньютоновской гравитации (порождаемых вакуумом), когда мы абстрагируемся от влияния тяготеющих масс, наиболее оптимально использовать метрику де Ситтера. И, наоборот, при решении задач, связанных с полями тяготеющих масс, резонно использовать метрику Шварцшильда. Характерным примером такого “разделения” задач может служить коллапс — состояние пространства-времени, при котором $g_{00} = 0$.

Гравитационный потенциал w для произвольной метрики имеет вид (1.38). Тогда компонента g_{00} равна

$$g_{00} = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 = 1 - \frac{2w}{c^2} + \frac{w^2}{c^4}, \quad (5.76)$$

т.е. коллапс $g_{00} = 0$ наступает при $w = c^2$.

В основном в физике рассматривается *гравитационный коллапс* — сжатие острова массы под воздействием сил ньютоновской гравитации вплоть до его гравитационного радиуса. Поэтому гравитационный коллапс в “чистом виде” предстаёт перед нами в пространстве с метрикой Шварцшильда (5.69), в котором присутствует только ньютоновское поле сферически симметричного “острова” массы в пустоте.

На больших расстояниях от тяготеющей массы гравитационное поле является слабым, поэтому там выполняется закон тяготения Ньютона. Следовательно, в слабом поле ньютоновской гравитации потенциал имеет вид

$$w = \frac{GM}{r}, \quad (5.77)$$

где G постоянная тяготения Ньютона, M масса тела, создающего данное поле тяготения. В слабом поле третий член в (5.76) пренебрежимо мал и выражение для g_{00} имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}, \quad (5.78)$$

т.е. гравитационный коллапс (обращение в нуль временной компоненты g_{00} метрического тензора пространства) в пространстве с метрикой Шварцшильда наступает при условии

$$\frac{2GM}{c^2 r} = 1, \quad (5.79)$$

где величина

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}, \quad (5.80)$$

имеющая размерность длины, называется *гравитационным радиусом*. Тогда g_{00} можно записать в виде

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (5.81)$$

Отсюда видно, что при $r = r_g$ в пространстве с метрикой Шварцшильда имеет место коллапс. В этом случае вся масса сферически симметричного тела (источника ньютоновского поля) оказывается сосредоточенной под его гравитационным радиусом. Поэтому поверхность сферического тела, радиус которого равен его гравитационному радиусу, называется *сферой Шварцшильда*.

Иначе такие объекты называют *чёрными дырами*, так как под гравитационным радиусом вторая космическая скорость превышает скорость света и таким образом свет не может “выйти” из этих объектов наружу.

Как видно из метрики (5.69), в поле тяготения Шварцшильда трёхмерное пространство не вращается ($g_{0i} = 0$), следовательно, интервал наблюдаемого времени (1.25) имеет вид

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt, \quad (5.82)$$

т.е. при $r = r_g$ интервал наблюдаемого времени $d\tau = 0$. Иначе говоря, для внешнего наблюдателя время на поверхности сферы Шварц-

шильда останавливается*. Внутри сферы Шварцшильда интервал наблюдаемого времени становится мнимым. Мы также можем сказать с уверенностью, что обычный земной наблюдатель, живущий на поверхности планеты, явно находится вне сферы Шварцшильда радиусом 0,443 см и может рассматривать процесс коллапса тел только “извне”.

Если $r = r_g$, то численное значение компоненты g_{11} фундаментального метрического тензора

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (5.83)$$

стремится к бесконечности. Однако определитель фундаментального метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ равен

$$g = -r^4 \sin^2\theta < 0, \quad (5.84)$$

поэтому пространство-время внутри гравитационного коллапсара в общем случае не является вырожденным, хотя коллапс также возможен и в нуль-пространстве.

Здесь надо сделать замечание относительно фотометрического расстояния и метрического наблюдаемого расстояния. Величина r в наших формулах не является метрическим расстоянием в направлении оси $x^1 = r$, так как в выражении для метрики (5.69) dr^2 входит с коэффициентом $\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}$. Величина r представляет собой *фотометрическое расстояние*, определяемое как функция освещённости, создаваемой постоянным источником света обратно пропорциональной квадрату расстояния. Иными словами, величина r есть радиус неевклидовой сферы площадью $4\pi r^2$ (см. лекции Зельманова [12]).

*При $g_{00} = 0$ (коллапс) интервал наблюдаемого времени (1.25) равен $d\tau = -\frac{1}{c^2} v_i dx^i$, где $v_i = -c \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}$ скорость вращения пространства (1.37). Только полагая $g_{0i} = 0$ и $v_i = 0$, условие коллапса можно определить корректно: для внешнего наблюдателя время на поверхности коллапсара останавливается $d\tau = 0$, а четырёхмерный интервал равен $ds^2 = -d\sigma^2 = g_{ik} dx^i dx^k$. Отсюда можно сделать единственный вывод: на поверхности коллапсара пространство является голономным (коллапсар не вращается). В нашей книге [19] было показано, что нуль-пространство коллапсирует, если не вращается. Здесь же доказана более общая теорема: если $g_{00} = 0$, то пространство является голономным независимо от того, является оно вырожденным ($g = 0$, нуль-пространство) или для него $g < 0$ (пространство-время общей теории относительности).

Метрическое элементарное наблюдаемое расстояние между двумя точками в пространстве с метрикой Шварцшильда, согласно теории хронометрических инвариантов, имеет вид

$$d\sigma = \sqrt{\frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}. \quad (5.85)$$

При $\theta = const$ и $\varphi = const$ оно составляет

$$\sigma = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{h_{11}} dr = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} \quad (5.86)$$

и не совпадает с фотометрическим расстоянием r .

Теперь определим метрику пространства-времени внутри сферы Шварцшильда. Для этого запишем внешнюю метрику (5.69) для радиуса $r < r_g$. В результате имеем

$$ds^2 = -\left(\frac{r_g}{r} - 1\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r_g}{r} - 1} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (5.87)$$

Вводя переобозначения $r = c\tilde{t}$ и $ct = \tilde{r}$, получаем

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1} - \left(\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{r}^2 - c^2 d\tilde{t}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (5.88)$$

т.е. метрика пространства-времени внутри сферы Шварцшильда аналогична внешней метрике при условии, что временная координата и пространственная радиальная координата r меняются местами. Иначе говоря, фотометрическое расстояние r вне чёрной дыры есть координатное время $c\tilde{t}$ внутри чёрной дыры, тогда как координатное время вне чёрной дыры ct является фотометрическим расстоянием \tilde{r} внутри неё.

Из первого члена внутренней метрики Шварцшильда (5.88) видно, что она является нестационарной и реализуется на ограниченном интервале времени

$$\tilde{t} = \frac{r_g}{c}. \quad (5.89)$$

Для Солнца, гравитационный радиус которого равен примерно 3 км, время существования такого пространства составило бы

всего лишь $< 10^{-5}$ сек. Для Земли, гравитационный радиус которой составляет всего 0,443 см, “время жизни” внутренней метрики Шварцшильда ещё меньше: $1,5 \times 10^{-11}$ сек.

Из сравнения метрик внутри (5.88) и снаружи (5.69) гравитационного коллапса следует:

- 1) пространство отсчёта обеих метрик является голономным, т.е. не вращается ($A_{ik} = 0$);
- 2) внешняя метрика коллапса стационарна, а вектор гравитационно-инерциальной силы равен $F^1 = -\frac{GM}{r^2}$;
- 3) внутренняя метрика коллапса нестационарна, а вектор гравитационно-инерциальной силы равен нулю.

Исследуем более детально внешнюю и внутреннюю метрики коллапса, полагая для простоты $\theta = const$ и $\varphi = const$, т.е. ограничиваясь из пространственных направлений только радиальным. Тогда внешняя метрика примет вид

$$ds^2 = -\left(\frac{r_g}{r} - 1\right)c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r_g}{r} - 1}, \quad (5.90)$$

внутренняя метрика, соответственно

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1} - \left(\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1\right) d\tilde{r}^2. \quad (5.91)$$

Определим физическое наблюдаемое расстояние (5.86) в радиальном направлении к центру тяжести коллапса. Получаем

$$\sigma = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}} = \sqrt{r(r - r_g)} + r_g \ln(\sqrt{r} + \sqrt{r - r_g}) + const \quad (5.92)$$

вдоль направления r . Отсюда видно: при $r = r_g$ наблюдаемое расстояние

$$\sigma_g = r_g \ln \sqrt{r_g} + const, \quad (5.93)$$

и является постоянной величиной.

Это означает, что сферу Шварцшильда, определяемую фотометрическим радиусом r_g , внешний наблюдатель воспринимает в виде сферы с наблюдаемым радиусом $\sigma_g = r_g \ln \sqrt{r_g} + const$ (5.93). Таким образом, для внешнего наблюдателя гравитационный кол-

лапсар (чёрная дыра) представляет собой сферу с постоянным наблюдаемым радиусом, на поверхности которого время останавливается.

Теперь рассмотрим гравитационный коллапсар изнутри. Интервал наблюдаемого времени (5.82) внутри сферы Шварцшильда для внешнего наблюдателя является мнимым

$$d\tau = i \sqrt{\frac{r_g}{r} - 1} dt, \quad (5.94)$$

или, во “внутренних” координатах $r = c\tilde{t}$ и $ct = \tilde{r}$ (с точки зрения “внутреннего” наблюдателя),

$$d\tilde{t} = \frac{1}{\sqrt{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1}} d\tilde{r}. \quad (5.95)$$

Следовательно, для внешнего наблюдателя внутреннее “мнимое” время коллапсара останавливается на его поверхности, тогда как для “внутреннего” наблюдателя темп наблюдаемого времени на поверхности бесконечно возрастает. Метрическое расстояние внутри коллапсара с точки зрения внешнего наблюдателя, согласно метрики (5.87), имеет вид

$$\sigma = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{r_g}{r} - 1}} = -\sqrt{r(r - r_g)} + r_g \arctan \sqrt{\frac{r_g}{r} - 1} + const, \quad (5.96)$$

или, с точки зрения “внутреннего” наблюдателя,

$$\tilde{\sigma} = \int \sqrt{\frac{r_g}{c\tilde{t}} - 1} d\tilde{r}. \quad (5.97)$$

Отсюда видно: при $r = c\tilde{t} = r_g$ для внешнего наблюдателя наблюдаемое расстояние между двумя точками стремится к постоянному значению, тогда как для “внутреннего” наблюдателя трёхмерный наблюдаемый интервал стремится к нулю. В заключение исследуем вопрос о том, что происходит с частицами, которые “снаружи” радиально падают на сферу Шварцшильда. Внешнюю метрику можно записать в виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2, \quad d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt, \quad d\sigma = \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}}. \quad (5.98)$$

Для частиц с вещественной массой $ds^2 > 0$, для светоподобных частиц $ds^2 = 0$, для сверхсветовых тахионов $ds^2 < 0$ (их масса является мнимой). При радиальном движении к чёрной дыре эти условия можно записать в виде:

- 1) вещественные частицы: $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 < c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2$;
- 2) светоподобные частицы: $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2$;
- 3) мнимые частицы (тахионы): $\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 > c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2$.

На сфере Шварцшильда $r = r_g$, поэтому $\frac{d\tau}{dt} = 0$, т.е. частица, в том числе и светоподобная, там останавливается. Четырёхмерный интервал на сфере Шварцшильда

$$ds^2 = -d\sigma^2 < 0, \quad (5.99)$$

откуда следует, что поверхность сферы Шварцшильда является домом для частиц с мнимой массой покоя.

5.7 Инфляционный коллапс

В пространстве де Ситтера островов масс нет, следовательно, отсутствует и поле ньютоновской гравитации. Тем не менее, условие $g_{00} = 0$ представляет собой чисто геометрическое определение коллапса, не обязательно связанное с ньютоновскими полями, и мы вполне можем рассмотреть его в любом пространстве. Итак, рассмотрим пространство с метрикой де Ситтера (5.73), характеризующей неньютоновское поле гравитации в пространстве постоянной кривизны без “острова” массы. В этом случае коллапс осуществляется за счёт сил неньютоновской гравитации. Из метрики де Ситтера (5.73) видно, что компонента

$$g_{00} = 1 - \frac{\lambda r^2}{3}, \quad (5.100)$$

т.е. гравитационный потенциал $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$ в пространстве де Ситтера равен

$$w = c^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} \right). \quad (5.101)$$

Так как это — потенциал поля неньютоновской гравитации, созданного вакуумом, мы будем называть его λ -потенциалом. Из

этого выражения видно, что λ -потенциал равен нулю в предельном случае, когда пространство де Ситтера становится плоским (т.е. когда $\lambda = 3K = 0$).

Так как в пространстве де Ситтера $\lambda = 3K$, следовательно:

- 1) $g_{00} = 1 - Kr^2 > 0$ при расстояниях $r < \frac{1}{\sqrt{K}}$;
- 2) $g_{00} = 1 - Kr^2 < 0$ при расстояниях $r > \frac{1}{\sqrt{K}}$;
- 3) $g_{00} = 1 - Kr^2 = 0$ (коллапс) при расстояниях $r = \frac{1}{\sqrt{K}}$.

При кривизне $K < 0$ величина $g_{00} = 1 - Kr^2$ всегда больше нуля. Таким образом, коллапс возможен только в пространстве де Ситтера с положительной кривизной $K > 0$.

Пространство нашей Вселенной в целом, как было показано в §5.3, имеет $K < 0$. Однако мы можем предположить наличие в нем локальных неоднородностей с $K > 0$, не влияющих на кривизну пространства в целом, в том числе и таких, где имеет место коллапс. Поэтому пространство де Ситтера с $K > 0$ имеет смысл рассматривать как локальное пространство каких-то компактных объектов, например – пространство внутри элементарных частиц.

Трёхмерная наблюдаемая кривизна C связана с четырёхмерной кривизной соотношением $C = -6K$ (5.55). Тогда, представляя трёхмерное пространство в виде сферы, получаем $C = \frac{1}{R^2}$ (5.57) и, соответственно, $K = -\frac{1}{6R^2}$ (5.58), где R трёхмерный наблюдаемый радиус кривизны. В случае $K < 0$ величина R является вещественной. При $K > 0$ величина R является мнимой.

Коллапс в пространстве де Ситтера возможен только при $K > 0$. В этом случае наблюдаемый радиус кривизны пространства является мнимым. Обозначим его $R = iR^*$, где R^* его абсолютная величина. Тогда в пространстве де Ситтера с $K > 0$

$$K = \frac{1}{6R^{*2}}, \quad (5.102)$$

и условие коллапса $g_{00} = 1 - Kr^2$ можно записать в виде

$$r = R^*\sqrt{6}, \quad (5.103)$$

т.е. на расстоянии $r = R^*\sqrt{6}$ в пространстве де Ситтера с $K > 0$ величина $g_{00} = 0$ и, следовательно, происходит остановка наблюдаемого времени — наступает коллапс.

Иначе говоря, область пространства де Ситтера под радиусом $r = R^* \sqrt{6}$ пребывает в состоянии коллапса. Учитывая, что вакуум, являющийся “заполнителем” пространства де Ситтера, находится в состоянии инфляции, назовём состояние данной сколлапсировавшей области *инфляционным коллапсом*, а величину $r = R^* \sqrt{6}$ (5.77) *инфляционным радиусом* r_{inf} . Тогда сколлапсировавшую область пространства де Ситтера под инфляционным радиусом мы будем называть *инфляционным коллапсаром*, или — *инфлянтоном*.

Внутри инфлянтонa, соответственно, $K > 0$, (наблюдаемая трёхмерная кривизна $C < 0$). В этом случае плотность вакуума отрицательна (инфляционное давление положительно, вакуум сжимается) и $\lambda > 0$, т.е. неньютоновские силы являются силами отталкивания. Это означает, что инфляционный коллапсар (инфлянтон) заполнен вакуумом отрицательной плотности и существует, балансируя на “лезвии бритвы” между сжимающим давлением вакуума и растягивающими силами неньютоновской гравитации. Интервал наблюдаемого времени в пространстве де Ситтера с $K > 0$ имеет вид

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = \sqrt{1 - Kr^2} dt = \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}} dt, \quad (5.104)$$

т.е. на поверхности инфляционной сферы наблюдаемое время останавливается $d\tau = 0$. Принятая нами сигнатура (+---), т.е. условие $g_{00} > 0$, имеет место при $r < r_{\text{inf}}$.

Используя понятие инфляционного радиуса, запишем метрику де Ситтера с $K > 0$ в следующем виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.105)$$

Компоненты гравитационно-инерциальной силы (5.74) в этом случае имеют вид

$$F_1 = \frac{c^2}{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}} \frac{r}{r_{\text{inf}}}, \quad F^1 = c^2 \frac{r}{r_{\text{inf}}}. \quad (5.106)$$

Теперь найдём наблюдаемое расстояние и наблюдаемый инфляционный радиус. Для простоты будем полагать, что $\theta = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$, т.е. из пространственных направлений ограничимся толь-

ко радиальным. Тогда наблюдаемый трёхмерный интервал имеет следующий вид

$$\sigma = \int \sqrt{h_{11}} dr = \int \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = r_{\text{inf}} \arcsin \frac{r}{r_{\text{inf}}} + \text{const}, \quad (5.107)$$

и, соответственно, наблюдаемый инфляционный радиус имеет постоянное значение

$$\sigma_{\text{inf}} = \int_0^{r_{\text{inf}}} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \frac{\pi}{2} r_{\text{inf}}. \quad (5.108)$$

В пространстве с метрикой Шварцшильда, которое мы рассмотрели в предыдущем параграфе, коллапсар представляет собой сколлапсировавшую компактную массу, создающую кривизну пространства в целом: обычный наблюдатель находится вне гравитационного коллапсара. В пространстве де Ситтера коллапсар представляет собой вакуум, заполняющий всё пространство. Область коллапса в пространстве де Ситтера сравнима с поверхностью, радиус которой равен радиусу кривизны пространства, поэтому обычный наблюдатель находится под поверхностью инфляционного коллапсара, рассматривая коллапс “изнутри”. Чтобы заглянуть за пределы инфляционного коллапсара, запишем метрику де Ситтера с $K > 0$ (5.105) для $r > r_{\text{inf}}$. Ограничиваясь из пространственных направлений только радиальным, получаем в координатах обычного наблюдателя (“внутренние” координаты инфляционного коллапсара)

$$ds^2 = - \left(\frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1 \right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1}, \quad (5.109)$$

или, с точки зрения наблюдателя, находящегося вне коллапсара (во “внешних” координатах коллапсара $r = c\tilde{t}$ и $ct = \tilde{r}$),

$$ds^2 = \frac{c^2 d\tilde{t}^2}{\frac{c^2 \tilde{t}^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1} - \left(\frac{c^2 \tilde{t}^2}{r_{\text{inf}}^2} - 1 \right) d\tilde{r}^2. \quad (5.110)$$

5.8 Заключение

При низкой плотности материи ($5-10 \times 10^{-30}$ грамм/см³ в Метагалактике) пространство можно считать приблизительно пустым, и

мы можем с уверенностью полагать тензор энергии-импульса равным $T_{\alpha\beta} \sim g_{\alpha\beta}$. В этом случае уравнения Эйнштейна имеют вид $R_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$, где $k = const$ (такое пространство является *пространством Эйнштейна*). Существует особый тип таких пространств: $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$, где $\mu = const$ есть плотность материи. Этот тип тензора энергии-импульса характеризует вакуумоподобное состояние материи, известное как *μ -вакуум*.

В той главе мы показали физический смысл компонент тензора энергии-импульса вакуума $\check{T}_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}$ и тензора энергии-импульса μ -вакуума $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$. Мы также получили математические выражения для физических наблюдаемых свойств вакуума и μ -вакуума, таких, как плотность, плотность импульса и тензор напряжений: в итоге мы получили, что вакуум является однородной, невязкой, неизлучающей и инфляционной (расширяющейся при положительной плотности) средой. Исходя из результатов Петрова и Глинера, и принимая во внимание выражение для тензора энергии-импульса вакуума и μ -вакуума (и, следовательно, существование их физических свойств), мы предложили “геометрическую” классификацию материи в соответствии с её тензором энергии-импульса. Мы назвали её *T-классификацией материи*:

- *пустота* (пустое пространство-время) — состояние реализующееся когда тензор энергии-импульса равен нулю ($T_{\alpha\beta} = 0$) и нет сил ньютоновской гравитации ($\lambda = 0$);
- *физический вакуум* или, просто, *вакуум* — состояние, при котором нет вещества ($T_{\alpha\beta} = 0$), но есть ньютоновская гравитация ($\lambda \neq 0$);
- *μ -вакуум* $T_{\alpha\beta} = \mu g_{\alpha\beta}$, $\mu = const$ (вакуумоподобное состояние материи);
- *вещество* $T_{\alpha\beta} \neq 0$, $T_{\alpha\beta} \neq g_{\alpha\beta}$ (включает обычное вещество и электромагнитное поле).

Обычный опыт показывает, что плотность материи во Вселенной положительна. При положительной плотности вакуума, космологический член имеет знак $\lambda < 0$ (ньютоновские гравитационные силы являются силами притяжения) и инфляционное давление вакуума является положительным (вакуум расширяется).

Исследуя пространства, заполненные исключительно вакуумом (без вещества), такие как пространство де Ситтера, мы обнаружили,

что условие коллапса ($g_{00} = 0$) реализуется в таком пространстве в виде специфической области (объекта), который мы назвали *инфляционный коллапсар*, или *инфлянтон*. Внутри инфлянтонa $\lambda > 0$, т.е. плотность вакуума отрицательна, давление положительно, а ньютоновские силы гравитации являются силами отталкивания, делая инфлянтон балансирующим между сжимающим давлением вакуума и расширяющими силами неньютоновской гравитации.

6.1 Концепция зеркальной Вселенной

Как мы упоминали в §5.1, попытки представить наш мир и зеркальную Вселенную в виде пространств положительной и отрицательной кривизны закончились неудачей: даже в рамках метрики де Ситтера, одной из наиболее простых пространственно-временных метрик, траектории в пространстве с положительной кривизной принципиально отличаются от траекторий в пространстве с отрицательной кривизной (см. главу VII в книге Синга [35]).

Вместе с тем многие исследователи, начиная с Дирака, интуитивно чувствовали, что зеркальную Вселенную (как антипод нашей Вселенной) следует искать не в пространстве с другим знаком кривизны, а в пространстве с другим знаком масс и энергий частиц. То есть, так как массы частиц нашего мира являются положительными, то массы частиц зеркальной Вселенной, по-видимому, должны быть отрицательными.

Джозеф Вебер пишет в своей книге [28]: “Ни закон всемирного тяготения Ньютона, ни релятивистская теория гравитации не исключают возможности существования отрицательных масс, но эмпирический факт состоит в том, что такие масс никогда не наблюдались. Как из теории тяготения Ньютона, так и из общей теории относительности вытекало бы поведение отрицательных масс, в корне отличное от соответствующей ситуации в электродинамике. < . . . > Для двух тел, одно из которых обладает положительной массой, а другое — отрицательной, но равной первой по абсолютному значению, следовало бы ожидать, что положительная масса будет притягивать отрицательную, а отрицательная — отталкивать положительную, так что одна будет гнаться за другой! Если движение будет совершаться по линии, соединяющей центры тел, то такая система будет двигаться с постоянным ускорением. Эту задачу рассмотрел

Х. Бонди [42]” Леонард Шифф, предположив пассивную гравитационную массу позитрона отрицательной (его инертная масса, как известно из наблюдений, положительна), основываясь на методах квантовой электродинамики, вычислил разницу между инертной и гравитационной массами позитрона. Эта разница получилась существенно больше точности измерений в эксперименте Этвеша, иллюстрирующего равенство инертной и гравитационной масс [43]. В результате Шифф пришёл к выводу о том, что возможность отрицательной гравитационной массы у позитрона исключается (подробнее см. главу 1 в книге Вебера [28]). Кроме того, при совместном “проживании” в одной и той же пространственно-временной области, частицы с положительными и отрицательными массами должны непрерывно аннигилировать. Возможные космологические последствия “смешанного” существования частиц с отрицательными и с положительными массами исследовал Я. П. Терлецкий [44, 45].

В целом, развитию идеи о зеркальной Вселенной как мире с отрицательными массами и энергиями препятствовали два следующих обстоятельства:

- 1) отсутствие экспериментальных фактов существования отрицательных масс;
- 2) отсутствие теории, которая бы чётко обосновала разделение миров с положительной и отрицательной массами в пространстве-времени общей теории относительности.

Соответственно, решающими для разрешения проблемы зеркальной Вселенной могли бы стать:

- 1) *experimentum crucis*, прямо указывающий на проявления обменных взаимодействий между нашим миром и зеркальной Вселенной;
- 2) теоретическое исследование геометрическими методами общей теории относительности, в рамках которого удастся показать, что миры с положительной и отрицательной массами разделены пространственно-временной мембраной, а также вычислить условия возможного проникновения частиц обоих миров через разделяющую мембрану *experimentum crucis*.

В этой главе мы предпримем попытку решить вторую (теоретическую) часть этой проблемы.

Итак, рассмотрим понятие “зеркальность” в применении к метрике четырёхмерного пространства-времени. Для решения этой за-

дачи запишем квадрат четырёхмерного интервала в х.и.-виде

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2, \quad (6.1)$$

где

$$d\sigma^2 = h_{ik} dx^i dx^k, \quad (6.2)$$

$$d\tau = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2} v_i dx^i = \left(1 - \frac{w + v_i u^i}{c^2}\right) dt. \quad (6.3)$$

Отсюда, в частности, видно, что элементарный пространственный интервал (6.2) представляет собой квадратичную функцию относительно элементарных пространственных приращений dx^i . Пространственные координаты x^i равноправны: не существует принципиальных различий между поступательными движениями вправо-влево и вверх-вниз. Поэтому мы вообще не будем касаться зеркальных отражений относительно пространственных координат.

Другое дело — время. Физическое наблюдаемое (собственное) время τ обычного наблюдателя всегда течёт по направлению из прошлого в будущее, следовательно, $d\tau > 0$. Вместе с тем, существуют два возможных случая, при которых физическое наблюдаемое время останавливается. Во-первых, это возможно в обычном пространстве-времени в состоянии коллапса. Во-вторых, это происходит в нуль-пространстве — вырожденном пространстве-времени. Таким образом, состояние наблюдателя, собственное время которого останавливается, можно считать пограничным, т.е. недостижимым в обычном его состоянии.

Мы рассмотрим проблему зеркальности как для $d\tau > 0$, так и для $d\tau = 0$. В последнем случае исследование будет проведено отдельно для сколлапсировавших областей обычного пространства-времени и для нуль-пространства.

Начнём с обычного случая, в котором интервал физически наблюдаемого времени $d\tau > 0$. Из выражения для наблюдаемого времени (6.3) очевидно, что это условие имеет место при

$$w + v_i u^i < c^2. \quad (6.4)$$

В отсутствие вращения пространства ($v_i = 0$) оно принимает вид $w < c^2$, что соответствует пространственно-временной структуре, находящейся вне состояния коллапса.

Квадрат четырёхмерного интервала ds^2 (6.1) можно записать в развёрнутом виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 - 2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) v_i dx^i dt - h_{ik} dx^i dx^k + \frac{1}{c^2} v_i v_k dx^i dx^k, \quad (6.5)$$

с другой стороны

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2 = c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad v^2 = h_{ik} v^i v^k. \quad (6.6)$$

Поделив обе части выражения ds^2 (6.5) на

- 1) $c^2 d\tau^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ в случае $ds^2 > 0$,
- 2) $c^2 d\tau^2$ в случае $ds^2 = 0$,
- 3) $-c^2 d\tau^2 \left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)$ в случае $ds^2 < 0$,

во всех трёх случаях мы получаем одно и то же квадратное уравнение относительно функции хода координатного времени объекта t от хода собственного времени наблюдателя τ

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \frac{2v_i v^i}{c^2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)} \frac{dt}{d\tau} + \frac{1}{\left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2} \left(\frac{1}{c^4} v_i v_k v^i v^k - 1\right) = 0, \quad (6.7)$$

которое имеет два корня

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_1 = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2} v_i v^i + 1\right), \quad (6.8)$$

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)_2 = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2} v_i v^i - 1\right). \quad (6.9)$$

Интегрируя координатное время объекта t по аргументу τ , получаем выражение

$$t = \frac{1}{c^2} \int \frac{v_i dx^i}{1 - \frac{w}{c^2}} \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{w}{c^2}} + const. \quad (6.10)$$

Это выражение легко интегрируется, если пространство не вращается и гравитационный потенциал $w = 0$. Тогда интеграл имеет

вид $t = \pm \tau + const$. Выбором начальных условий можно сделать константу интегрирования равной нулю. В этом случае выражение для координатного времени t принимает вид

$$t = \pm \tau, \quad \tau > 0, \quad (6.11)$$

график которого представляет два луча, являющимися продолжением друг друга относительно $\tau > 0$. Можно сказать, что зеркалом (мембраной) здесь является собственное время наблюдателя, а само зеркало разделяет два мира: в одном мире координатное время (наблюдаемое изменение временной координаты) течёт из прошлого в будущее, тогда как в другом, зеркальном мире, координатное время течёт из будущего в прошлое.

Отметим, что мир с обратным ходом времени не является кинолентой, запущенной в обратную сторону. Оба мира вполне равноправны, но, с точки зрения обычного наблюдателя, в зазеркалье значение временной координаты отрицательно. Зеркало (мембрана) в данном случае является плоским, т.е. оно отражает ход времени, но не влияет на него.

Теперь, пусть пространство не вращается ($v_i = 0$), но гравитационный потенциал не равен нулю $w \neq 0$. Тогда

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{w}{c^2}} + const. \quad (6.12)$$

Если гравитационное поле является слабым ($w \ll c^2$), то интеграл имеет вид

$$t = \pm \left(\tau + \frac{1}{c^2} \int w d\tau \right) = \pm (\tau + \Delta t), \quad (6.13)$$

где Δt поправка, обусловленная наличием поля потенциала w , создающего ускорение. Величина w может описывать любое скалярное поле, связанное с нулевой компонентой g_{00} фундаментального метрического тензора: как поле ньютоновского потенциала, так и поле неньютоновской гравитации.

Если гравитационное поле, создаваемое потенциалом w , является сильным, то интеграл имеет вид (6.12) и зависит от потенциала w : чем сильнее поле w , тем быстрее течёт координатное время (6.12). В пределе, когда $w = c^2$, мы имеем $t \rightarrow \infty$. Вместе с тем, при

$w = c^2$ наступает коллапс ($d\tau = 0$). Этот случай будет рассмотрен позднее, поэтому сейчас мы по-прежнему будем полагать $w < c^2$.

Рассмотрим координатное время в пространствах с конкретными метриками: в пространстве с метрикой Шварцшильда и в пространстве с метрикой де Ситтера.

Если потенциал w характеризует ньютоновское гравитационное поле (пространство с метрикой Шварцшильда), тогда

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{GM}{c^2 r}} = \pm \int \frac{d\tau}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (6.14)$$

откуда следует, что чем ближе к гравитационному радиусу тяготеющей массы, тем сильнее ход координатного времени отличается от хода собственного времени наблюдателя.

В том случае, если величина w представляет собой потенциал неньютоновского поля гравитации (как, например, в пространстве с метрикой де Ситтера), тогда

$$t = \pm \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}} = \pm \int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{r_{\text{inf}}^2}}}, \quad (6.15)$$

из чего видно, что чем ближе фотометрическое расстояние r к инфляционному радиусу коллапсара, тем быстрее (по абсолютной величине) течёт координатное время. В пределе при $r \rightarrow r_{\text{inf}}$ величина координатного времени $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, в отсутствии вращения пространства, но при наличии гравитационного потенциала, координатное время в обычном и зеркальном пространствах течёт тем быстрее, чем больше потенциал присутствующего поля.

Теперь исследуем общий случай, когда имеют место и вращение пространства и гравитационное поле. Тогда интеграл для t имеет вид (6.10), т.е. координатное время в неголономном (вращающемся) пространстве складывается из двух частей:

- 1) “вращательного” времени, обусловленного наличием члена $v_i dx^i$, имеющего размерность момента вращения, отнесённого к единице массы;
- 2) обычного координатного времени, связанного с ходом собственного времени наблюдателя.

Из интеграла для t (6.10) видно, что вращательное координатное время, образованное вращением самого пространства, существует и без наблюдателя (так как оно не зависит от τ). Для наблюдателя, покоящегося на поверхности Земли (за исключением полюсов) оно может быть интерпретировано как течение времени, обусловленное вращением нашей планеты. Оно есть всегда независимо от того, фиксирует его наблюдатель или нет. Обычное координатное время связано с наличием наблюдателя (зависит от его собственного времени τ) и с полем, существующим в точке наблюдения, в частности, с полем ньютоновского потенциала.

Отметим, что при $v_i \neq 0$ значение временной координаты t в начальный момент наблюдения (когда собственное время наблюдателя $\tau_0 = 0$) отлично от нуля.

Записывая интеграл для t (6.10) в виде

$$t = \int \frac{\frac{1}{c^2} v_i dx^i \pm d\tau}{1 - \frac{w}{c^2}}, \quad (6.16)$$

получаем, что подинтегральное выражение:

- 1) положительно, если $\frac{1}{c^2} v_i dx^i > \mp d\tau$;
- 2) равно нулю, если $\frac{1}{c^2} v_i dx^i = \pm d\tau$;
- 3) отрицательно, если $\frac{1}{c^2} v_i dx^i < \mp d\tau$.

Следовательно, координатное время t для вещественного наблюдателя останавливается, если скалярное произведение скорости вращения на наблюдаемую скорость поступательного движения объекта равно квадрату скорости света $v_i v^i = \pm c^2$. Это происходит, когда обе скорости по абсолютной величине равны скорости света, а по направлению либо совпадают, либо направлены в противоположные стороны.

Область пространства-времени, удовлетворяющая условию $v_i v^i = \pm c^2$, при котором координатное время для вещественного наблюдателя останавливается, является *мембраной-зеркалом*, разделяющим области пространства с положительными и отрицательными значениями временной координаты — области с прямым и обратным ходом времени.

Очевидно также, что обычный вещественный (досветовой) наблюдатель не может сопутствовать такому пространству отсчёта.

Назовём *зеркальным пространством* область пространства-времени, в которой координатное время имеет отрицательные значения. Рассмотрим свойства частиц в зеркальном пространстве.

Физически наблюдаемые компоненты четырёхмерного вектора импульса массовой частицы с массой покоя m_0 , т.е. вектора

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad (6.17)$$

имеют вид

$$\frac{P_0}{\sqrt{g_{00}}} = m \frac{dt}{d\tau} = \pm m, \quad P^i = \frac{m}{c} v^i, \quad (6.18)$$

где знак “плюс” имеет место при прямом ходе координатного времени, а знак “минус” при обратном ходе координатного времени относительно собственного времени наблюдателя. Квадрат четырёхмерного вектора импульса имеет вид

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = m_0^2, \quad (6.19)$$

а его длина равна

$$\left| \sqrt{P_\alpha P^\alpha} \right| = m_0. \quad (6.20)$$

Таким образом, любая частица с ненулевой массой покоя, представляющая собой четырёхмерную (пространственно-временную) структуру, проецируется на время как диполь, состоящий из положительной массы $+m$ и отрицательной массы $-m$. Но при проецировании P^α на трёхмерное пространство наблюдателя (пространственное сечение), обе проекции сливаются в одну — трёхмерный наблюдаемый импульс $p^i = m v^i$. То есть, каждая наблюдаемая частица с положительной релятивистской массой обладает *зеркальным двойником*, масса которого является отрицательной: частица и её зеркальный двойник различаются лишь знаком массы, при этом трёхмерный наблюдаемый импульс обеих частиц положителен.

Аналогично, для четырёхмерного волнового вектора

$$K^\alpha = \frac{\omega}{c} \frac{dx^\alpha}{d\sigma} = k \frac{dx^\alpha}{d\sigma}, \quad (6.21)$$

характеризующего безмассовую (светоподобную) частицу, физически наблюдаемые проекции имеют вид

$$\frac{K_0}{\sqrt{g_{00}}} = \pm k, \quad K^i = \frac{k}{c} c^i. \quad (6.22)$$

Это означает, что каждая безмассовая (светоподобная) частица как четырёхмерный объект также существует в двух состояниях: в нашем мире с прямым ходом времени она проявляется в виде безмассовой частицы с положительной частотой, а в мире с обратным ходом времени — как безмассовая частица с отрицательной частотой.

Определим *материальную Вселенную* как четырёхмерное пространство-время, заполненное веществом и полями, в котором движутся частицы. Тогда, так как каждая частица является четырёхмерным дипольным объектом, можно сказать, что материальная Вселенная как совокупность базового пространства-времени и частиц — также четырёхмерный дипольный объект, существующий в двух состояниях: *наша Вселенная*, где массы частиц и временная координата положительны, и её зеркальный двойник — *зеркальная Вселенная*, в которой массы частиц и временная координата отрицательны, но трёхмерный наблюдаемый импульс положителен. Вместе с тем, фоновое четырёхмерное пространство-время нашего мира и зеркальной Вселенной — одно и то же.

Например, исследуя свойства Вселенной в целом, мы отвлекаемся от действия ньютоновских полей тяготения редких “островов” вещества и, таким образом, рассматриваем пространство нашей Вселенной как пространство де Ситтера отрицательной четырёхмерной кривизны (трёхмерная наблюдаемая кривизна в этом случае положительна, см. §5.3). Таким образом, можно считать, что наша Вселенная в целом — это область пространства де Ситтера отрицательной четырёхмерной кривизны, в которой временная координата и массы частиц положительны, тогда как зеркальная Вселенная — область того же пространства де Ситтера, в которой, наоборот, временная координата и массы частиц являются отрицательными.

Вопрос о мембране, разделяющей нашу Вселенную и зеркальную Вселенную в базовом пространстве-времени и не позволяющей им “смешиваться” и препятствующей тотальной аннигиляции частиц, мы рассмотрим в следующем параграфе.

Теперь исследуем дипольную структуру Вселенной для случая, когда $d\tau = 0$, т.е. в сколлапсировавших областях обычного пространства-времени (внутри коллапсаров) и в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве).

Как мы показали ранее, условие $d\tau = 0$ имеет место в обычном (невыврожденном) пространстве-времени в случае коллапса. При этом пространство является голономным (не вращается). Тогда

$$d\tau = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) dt = 0. \quad (6.23)$$

Это условие справедливо для коллапса любого типа, т.е. для коллапса любого типа гравитационного потенциала w , в том числе и для ньютоновского потенциала. При $d\tau = 0$ (6.23) четырёхмерная метрика принимает вид

$$ds^2 = -d\sigma^2 = -h_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} u^i u^k dt^2, \quad (6.24)$$

следовательно, в этом случае

$$|ds| = i d\sigma = i \sqrt{h_{ik} u^i u^k} dt = i u dt, \quad u^2 = h_{ik} u^i u^k, \quad (6.25)$$

так что четырёхмерный вектор импульса частицы на поверхности коллапсара принимает вид

$$P^\alpha = m_0 \frac{dx^\alpha}{d\sigma}, \quad d\sigma = u dt. \quad (6.26)$$

Его квадрат равен

$$P_\alpha P^\alpha = g_{\alpha\beta} P^\alpha P^\beta = -m_0^2, \quad (6.27)$$

следовательно, длина вектора P^α (6.26) является мнимой

$$\left| \sqrt{P_\alpha P^\alpha} \right| = i m_0. \quad (6.28)$$

Последнее, в частности, означает, что на поверхности коллапсара обитают частицы с мнимыми массами. Но в то же время это не означает, что там должны наблюдаться сверхсветовые частицы в обычном понимании (таххионы, массы которых являются мнимыми). На поверхности коллапсара вообще не может быть речи о наблюдаемой скорости, так как там, с точки зрения внешнего наблюдателя, наблюдаемое время останавливается $d\tau = 0$.

Компоненты четырёхмерного вектора импульса частиц, обитающих на поверхности коллапсара (6.26), формально имеет следующий вид

$$P^0 = \frac{m_0 c}{u}, \quad P^i = \frac{m_0}{u} u^i. \quad (6.29)$$

Однако фактически мы не можем их наблюдать, так как на поверхности коллапсара собственное время обычного (вещественного) наблюдателя останавливается. Вместе с тем, входящая в это выражение скорость $u^i = \frac{dx^i}{dt}$ является координатной величиной и не зависит от собственного времени наблюдателя. Поэтому мы можем интерпретировать пространственный вектор $P^i = \frac{m_0}{u} u^i$ как координатный импульс частицы, а величину $\frac{m_0}{u} c^3$ как энергию частицы на поверхности коллапсара. Здесь энергия частицы обладает лишь одним знаком, поэтому поверхность коллапсара как четырёхмерная область пространства-времени (область материальной Вселенной) не является дипольным объектом из двух зеркальных двойников: поверхность коллапсара (независимо от его природы) существует в единственном состоянии.

Вместе с тем, поверхность коллапсара ($g_{00} = 0$) можно рассматривать как мембрану, разделяющую четырёхмерные области пространства-времени до коллапса и после коллапса. До коллапса $g_{00} > 0$ и собственное время наблюдателя τ является вещественным. После коллапса $g_{00} < 0$, следовательно, τ становится мнимым. При пересечении наблюдателем поверхности коллапсара, его собственное время “поворачивается” на 90° , меняясь ролями с пространственными координатами.

Понятие “светоподобная частица” на поверхности коллапсара теряет смысл, т.к., поскольку для светоподобных частиц $d\sigma = c d\tau$, на поверхности коллапсара ($d\tau = 0$) для них выполняется условие

$$u = \sqrt{h_{ik} u^i u^k} = \sqrt{\frac{h_{ik} dx^i dx^k}{dt^2}} = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{c d\tau}{dt} = 0. \quad (6.30)$$

Остановка собственного времени наблюдателя ($d\tau = 0$) также имеет место в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве): в нуль-пространстве, по определению, $d\tau = 0$ и $d\sigma = 0$. Эти условия (условия полного вырождения пространства-времени) можно записать в следующем виде

$$w + v_i u^i = c^2, \quad g_{ik} u^i u^k = c^2 \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2. \quad (6.31)$$

Частицы, обитающие в вырожденном пространстве-времени (нуль-частицы), обладают нулевой обычной релятивистской массой

$m = 0$, но ненулевой массой M (1.79) и ненулевым импульсом, обладающим свойством знакопостоянства

$$M = \frac{m}{1 - \frac{1}{c^2} (w + v_i u^i)}, \quad p^i = M u^i. \quad (6.32)$$

Таким образом, зеркального двойника имеет только обычная материя — массовые и безмассовые частицы вне состояния коллапса. При этом сколлапсировавшие объекты обычного пространства-времени (коллапсары, в том числе — чёрные дыры), не обладающие свойством зеркальной дипольности, являются “общими” объектами нашей Вселенной и зеркальной Вселенной. Объекты нуль-пространства, также не обладающие свойством зеркальной дипольности, в силу полного вырождения метрики находятся за пределами базового пространства-времени. Выход в “нейтральные зоны”, т.е. на поверхность сколлапсировавших объектов обычного пространства-времени и в нуль-пространство, возможен как из нашей Вселенной (мира с положительным ходом координатного времени), так и из зеркальной Вселенной (мира с отрицательным ходом координатного времени).

6.2 Условия перехода через мембрану между нашим миром и зеркальной Вселенной

Теперь выясним, что является мембраной, которая разделяет наш мир и зеркальную Вселенную в базовом пространстве-времени и, таким образом, препятствует тотальной аннигиляции всех частиц с отрицательными и положительными массами.

В нашем мире $dt > 0$, в зеркальной Вселенной $dt < 0$. Следовательно, разделяющая их мембрана — это область пространства-времени, в которой $dt = 0$ (координатное время останавливается). То есть, это область, характеризуемая условием

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2} v_i v^i \pm 1 \right) = 0, \quad (6.33)$$

которое можно записать в виде

$$dt = \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \left(\frac{1}{c^2} v_i dx^i \pm d\tau \right) = 0. \quad (6.34)$$

Вторая форма записи более универсальна, так как применима не только в пространстве-времени общей теории относительности, но и в обобщённом пространстве-времени, допускающем вырождение метрики.

Физические условия внутри мембраны ($t = \text{const}$, т.е. $dt = 0$), разделяющей наш мир и зеркальную Вселенную, согласно выражению (6.34), характеризуются следующим соотношением

$$v_i dx^i \pm c^2 d\tau = 0, \quad (6.35)$$

которое иначе можно записать следующим образом

$$v_i v^i = \pm c^2. \quad (6.36)$$

Это условие представляет собой скалярное произведение вектора линейной скорости вращения пространства и вектора наблюдаемой скорости перемещения тела. Его можно записать в виде

$$v_i v^i = |v_i| |v^i| \cos(v_i; v^i) = \pm c^2. \quad (6.37)$$

Отсюда следует, что это условие имеет место, когда скорости v_i и v^i равны по абсолютной величине скорости света и направлены либо в противоположные стороны (знак “минус”), либо сонаправлены (знак “плюс”).

Таким образом, мембрана, разделяющая наш мир и зеркальную Вселенную (мир с обратным ходом времени), физически представляет собой пространство, которое движется поступательно со скоростью света и одновременно вращается также со скоростью света, т.е. описывает правую или левую светоподобную спираль. В мире элементарных частиц такое пространство можно сопоставить с частицами, обладающими спиральностью (например, с фотонами).

Подставляя $dt = 0$ в выражение для ds^2 , получаем метрику внутри мембраны

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (6.38)$$

т.е. такое же выражение как и на поверхности коллапсара. Поскольку она является частным случаем пространственно-временной метрики с сигнатурой (+---), то ds^2 в данном случае строго отрицателен. Это означает, что в области пространства-времени, являющейся мембраной между нашим миром и зеркальной Вселенной, четы-

рёхмерный интервал является пространственно-подобным. Отличие от пространственно-подобной метрики на поверхности коллапса (6.24) состоит в том, что при коллапсе вращение пространства отсутствует ($g_{ik} = -h_{ik}$), тогда как в данном случае $g_{ik} = -h_{ik} + \frac{1}{c^2} v_i v_k$ (1.18). Иначе говоря,

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = -h_{ik} dx^i dx^k + \frac{1}{c^2} v_i v_k dx^i dx^k, \quad (6.39)$$

т.е. четырёхмерная метрика внутри мембраны является пространственно-подобной из-за такого вращения пространства, при котором выполняется условие $v_i dx^i = \pm c^2 d\tau$.

В результате обычная массовая частица (независимо от знака её массы) не может проникнуть в своём естественном виде через мембрану между нашим миром и зеркальной Вселенной: их разделяет барьер — область пространства-времени, в которой обитают светоподобные частицы, описывающие правые или левые светоподобные спирали.

Вместе с тем, как мы сейчас увидим, обменные взаимодействия между нашим миром и зеркальной Вселенной возможны, но не в результате появления частиц другого мира с массами противоположного знака, а через посредничество материи в состоянии, являющимся предельным случаем как частиц с положительными, так и с отрицательными массами.

Действительно, предельным случаем частиц с $m > 0$ и $m < 0$ являются частицы, релятивистская масса которых $m = 0$. С точки зрения геометрии пространства-времени, область обитания частиц с нулевой релятивистской массой является касательной в точке к областям обитания частиц с массами $m > 0$ и $m < 0$. Это означает, что частицы с массой $m = 0$ могут иметь обменные взаимодействия как с частицами нашего мира ($m > 0$), так и с частицами зеркальной Вселенной ($m < 0$).

Частицы с нулевой релятивистской массой $m = 0$, по определению, существуют в области пространства-времени, в которой $ds^2 = 0$ и $c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 = 0$. Приравнивая к нулю ds^2 внутри мембраны (6.38), получаем следующее физическое условие

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = 0, \quad (6.40)$$

которое, очевидно, может иметь место в двух случаях:

- 1) когда все величины dx^i равны нулю, т.е. $dx^i = 0$;
- 2) когда трёхмерная метрика вырождается $\tilde{g} = \det \|g_{ik}\| = 0$.

Первый случай реализуется в обычном пространстве-времени при предельных условиях на поверхности коллапсара: когда вся поверхность коллапсара стягивается в точку, все $dx^i = 0$ и, следовательно, метрика на его поверхности принимает вид $ds^2 = -h_{ik} dx^i dx^k = g_{ik} dx^i dx^k$ (6.24).

Второй случай реализуется на поверхности коллапсаров, существующих в нуль-пространстве: так как в нуль-пространстве, по определению, выполняется условие $g_{ik} dx^i dx^k = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2$, то при $w = c^2$ всегда $g_{ik} dx^i dx^k = 0$.

Первый случай является асимптотическим, поэтому в реальности не имеет места. Следовательно, можно ожидать, что посредничество в обменных взаимодействиях между нашим миром и зеркальной Вселенной (антимиром с обратным ходом времени) осуществляют частицы с нулевой релятивистской массой (нуль-частицы) на поверхности коллапсаров в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве).

6.3 Заключение

Итак, в этой главе мы показали, что наша Вселенная представляет собой наблюдаемую область пространства-времени, где временная координата положительна и частицы имеют положительные массы и энергии. Зеркальная Вселенная — это область пространства-времени, в которой, с точки зрения обычного наблюдателя, расположенного в нашем мире, временная координата отрицательна и частицы обладают отрицательными массами и энергиями. С точки зрения наблюдателя в нашем мире, зеркальная Вселенная — это мир с обратным ходом времени, где частицы движутся по отношению к нам из будущего в прошлое.

Эти два мира разделены пространственно-временной мембраной — областью пространства-времени, населённой светоподобными частицами движущимися вдоль светоподобных спиралей. В масштабах элементарных частиц такое пространство может быть отнесено к локальному пространству частиц, обладающих спиральностью (например, фотонов). Эта мембрана препятствует смешиванию частиц с положительными и отрицательными массами и, та-

ким образом, предотвращает их тотальную аннигиляцию. Обменные взаимодействия между двумя мирами могут осуществляться посредством частиц с нулевой релятивистской массой (нуль-частиц) при физических условиях, существующих на поверхности коллапсаров в полностью вырожденном пространстве-времени (нуль-пространстве).

Литература

1. Levi-Civita T. Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura Riemanniana. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1917, tome 42, 173–205.
2. Tangherlini F. R. The velocity of light in uniformly moving frame. A dissertation. Stanford University, 1958. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 44–110.
3. Recami E. Classical tachyons and possible applications. *Rivista del Nuovo Cimento*, 1986, vol. 9, 1–178.
4. Liberati S., Sonego S., and Visser M. Faster-than- c signals, special relativity, and causality. *Annals of Physics*, 2002, vol. 298, 151–185.
5. Терлецкий Я. П. Принцип причинности и второе начало термодинамики. *Доклады АН СССР*, 1960, том 133, № 2, 329–332.
English translation: Terletskii Ya. P. The causality principle and the second law of thermodynamics. *Soviet Physics Doklady*, 1961, vol. 5, 782–785.
6. Bilaniuk O.-M. P., Deshpande V. K., and Sudarshan E. C. G. “Meta” relativity. *American Journal of Physics*, 1962, vol. 30, no. 10, 718–723.
7. Feinberg G. Possibility of faster-than light particles. *Physical Review*, 1967, vol. 159, no. 5, 1089–1105.
8. Malykin G. B. and Malykin E. G. Tangherlini’s dissertation and its significance for physics of the 21th century. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 121–143.
9. Зельманов А. Л. Хронометрические инварианты. Канд. диссертация 1944 года. American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2006.
English translation: Zelmanov A. L. Chronometric Invariants. Translated from the 1944 PhD thesis, American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2006.
10. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Гос. изд-во теоретико-технической литературы, Москва, 1939 (ссылки на разделы даны из последнего 6-го русского издания, вдвое расширенного по сравнению с 1-м изданием, Наука, Москва, 1973).
English translation: Landau L. D. and Lifshitz E. M. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, Oxford, 1951 (section references are given from the final 4th English edition, expanded twicely from the 1st edition, Butterworth-Heinemann, 1979).

11. Зельманов А. Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие системы отсчёта в общей теории относительности. *Доклады АН СССР*, 1956, том 107, № 6, 815–818.
English translation: Zelmanov A. L. Chronometric invariants and accompanying frames of reference in the General Theory of Relativity. *Soviet Physics Doklady*, 1956, vol. 1, 227–230.
12. Зельманов А. Л. и Агаков В. Г. Элементы общей теории относительности. Наука, Москва, 1988.
13. Зельманов А. Л. К релятивистской теории анизотропной неоднородной вселенной. В сб.: *Труды 6-го совещания по вопросам космогонии*, проходившего в 1957 г., Изд-во АН СССР, Москва, 1959, 144–174.
English translation: Zelmanov A. L. On the relativistic theory of an anisotropic inhomogeneous universe. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 33–63.
14. Cattaneo C. General Relativity: relative standard mass, momentum, energy, and gravitational field in a general system of reference. *Nuovo Cimento*, 1958, vol. 10, 318–337.
15. Cattaneo C. On the energy equation for a gravitating test particle. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 11, 733–735.
16. Cattaneo C. Conservation laws in General Relativity. *Nuovo Cimento*, 1959, vol. 13, 237–240. vol. 11, 733–735.
17. Cattaneo C. Problèmes d’interprétation en relativité générale. *Colloques internationaux du CNRS*, no. 170 “Fluides et champ gravitationnel en relativité générale”, Éditions du CNRS, Paris, 1969, 227–235.
18. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. Гостехиздат, Москва, 1953.
German translation: Raschewski P. K. Riemannsche Geometrie und Tensoranalysis. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959 (reprinted by Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993).
19. Рабунский Д. и Борисова Л. Частицы здесь и за зеркалом. Перевод с 4-го, переработанного английского издания, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.
Издания на английском опубликованы в 2001, 2008, 2012, 2023; на французском — в 2010, 2023.
Оригинальное издание: Rabounski D and Borissova L. *Particles Here and Beyond the Mirror*. The 4th revised edition, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.
Перевод на французский: Rabounski D. et Borissova L. *Particules de l’Univers et au delà du miroir*. La 2ème édition révisée, *New Scientific Frontiers*, Londres, 2023.
20. Терлецкий Я. П. и Рыбаков Ю. П. Электродинамика. Высшая школа, Москва, 1980.

21. Papapetrou A. Spinning test-particles in General Relativity. I. *Proceedings of the Royal Society A*, 1951, vol. 209, 248–258.
22. Corinaldesi E. and Papapetrou A. Spinning test-particles in General Relativity. II. *Proceedings of the Royal Society A*, 1951, vol. 209, 259–268.
23. Suhendro I. A four-dimensional continuum theory of space-time and the classical physical fields. *Progress in Physics*, 2007, no. 4, 34–46.
24. Suhendro I. Spin-curvature and the Unification of Fields in a Twisted Space. Svenska fysikarkivet, Stockholm, 2008.
25. Павлов Н. В. и дель Прадо Х. Частное сообщение А. Л. Зельманову, 1968.
26. Станюкович К. П. Гравитационное поле и элементарные частицы. Наука, Москва, 1965.
27. Станюкович К. П. К вопросу о существовании устойчивых частиц в метagalактике. В сб.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, выпуск 1, Атомиздат, Москва, 1966, 267–279.
English translation: Stanyukovich K. On the problem of the existence of stable particles in the Metagalaxy. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 99–110.
28. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. Изд-во иностранной литературы, Москва, 1962.
Оригинальное издание: Weber J. *General Relativity and Gravitational Waves*. Interscience Publishers, New York, 1961.
29. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. Гос. изд-во физ-мат. литературы, Москва, 1961.
English translation: Petrov A. Z. *Einstein Spaces*. Pergamon Press, Oxford, 1969.
30. Петров А. З. Классификация пространств, определяющих поля тяготения. *Учёные записки Казанского гос. университета*, 1954, том 114, № 8, 55–69.
English translation: Petrov A. Z. The classification of spaces defining gravitational fields. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 81–98.
31. Борисова (Григорьева) Л. Б. Хронометрически инвариантное представление классификации полей тяготения Петрова. *Доклады АН СССР*, 1970, том 192, № 6, 1251–1254.
English translation: Borissova (née Grigor'eva) L. B. Chronometrically invariant representation of the classification of the Petrov gravitational fields. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, 579–582.
32. Глинер Э. Б. Алгебраические свойства тензора энергии-импульса и вакуумоподобные состояния материи. *Журнал теоретической и экспериментальной физики*, 1966, том 49, № 2, 543–548.

- English translation: Gliner E. B. Algebraic properties of energy-momentum tensor and vacuum-like states of matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1966, vol. 22, no. 2, 378–382.
33. Глинер Э. Б. Вакуумоподобное состояние среды и фридмановская космология. Доклады АН СССР, 1970, том 192, № 4, 771–774.
English translation: Gliner E. B. Vacuum-like state of medium and Friedmann's cosmology. *Soviet Physics Doklady*, 1970, vol. 15, 559–562.
34. Сахаров А. Д. Начальная стадия расширения Вселенной и возникновение неоднородности распределения вещества. *Журнал теоретической и экспериментальной физики*, 1966, том 49, № 1, 345–357.
English translation: Sakharov A. D. The initial stage of an expanding Universe and the appearance of a nonuniform distribution of matter. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1966, vol. 22, no. 1, 241–249.
35. Синг Дж. Общая теория относительности. Изд-во иностранной литературы, Москва, 1963.
Оригинальное издание: Synge J. L. *Relativity: the General Theory*. North Holland, Amsterdam, 1960.
36. Schouten J. A. und Struik D. J. Einführung in die neuen Methoden der Differentialgeometrie. Noordhoff, Groningen, 1938.
First published in *Zentralblatt für Mathematik*, 1935, Bd. 11 und Bd. 19.
37. McVittie G. C. Remarks on cosmology. *Paris Symposium on Radio Astronomy* (IAU Symposium no. 9 and URSI Symposium no. 1, July 30 — August 6, 1958), Stanford University Press, Stanford, 1959, 533–535.
38. Орос ди Бартини Р. Некоторые соотношения между физическими константами. Доклады АН СССР, 1965, том 163, № 4, 861–864.
English translation: Oros di Bartini R. Some relations between physical constants. *Soviet Physics Doklady*, 1965, vol. 10.
39. Орос ди Бартини Р. Соотношения между физическими величинами. В сб.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, выпуск 1, Атомиздат, Москва, 1966, 249–266.
English translation: Oros di Bartini R. Relations between physical constants. *Progress in Physics*, 2005, no. 3, 34–40.
40. Crothers S. J. On the general solution to Einstein's vacuum field for the point-mass when $\lambda = 0$ and its consequences for relativistic cosmology. *Progress in Physics*, 2005, no. 3, 7–18.
41. Kottler F. Über die physikalischen Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Annalen der Physik*, 1918, Bd. 361, Nr. 14, 401–462.
42. Bondi H. Negative mass in General Relativity. *Review of Modern Physics*, 1957, vol. 29, no. 3, 423–428.
43. Schiff L. I. Sign of gravitational mass of a positron. *Physical Review Letters*, 1958, vol. 1, no. 7, 254–255.

44. Терлецкий Я. П. Парадоксы теории относительности. Изд-во Университета дружбы народов им. Патриса Лумумбы, Москва, 1965.
English translation: Terletskii Ya. P. Paradoxes in the Theory of Relativity. Plenum Press, New York, 1968.
 45. Terletskii Ya. P. Paradoxes in the theory of relativity. *American Journal of Physics*, 1969, vol. 37, no. 4, 460–461.
-

Предметный указатель

- абсолютно антисимметричные единичные тензоры 47
антисимметричный тензор 45
асимметрия движения частиц вдоль оси времени 26, 29
- Бартини Р., см. *ди Бартини Р.*
бивектор 37
Био-Савара закон 84
- вакуум 235, 239, 247
— физические свойства 249
Вебер Дж. 256
вектор тока 81
векторное произведение 45
вещество 245
вихрь (ротор) 62
времени линия 15
времени функция 25
— физические условия 30, 286
вязкого напряжения тензоры 250
- галилеева система отсчёта 47
геодезическая линия 9
геодезическое движение 9
геометрический объект 36
Глинер Э. Б. 241
голограмма 31
голономность пространства 15
— тензор неголономности 21
горизонт событий 257
гравитационный коллапс 264
гравитационно-инерциальной силы вектор 21
- Даламбера оператор 64
дальнодействие 31
- действие 106, 171
дель Прадо Х. 83
де Ситтера метрика 262
— пространство 243, 251, 255, 257–264, 270–273
деформации тензор 22
ди Бартини Р. 258–260
дивергенция 55, 57
дискриминантные тензоры 50–51
дифференциал 9, 52
- единичный тензор 17
- Зельманов А. Л. 11, 14–25, 62, 66, 179, 188, 238, 243, 252
— теорема 19
— тензор кривизны 252
- зеркала принцип 28
зеркальная Вселенная 244
- изотропное пространство 228, 234
инверсионный взрыв 260
инфлянтон 272
инфляционный коллапс 272
- Катано К. 14
квантизация масс элементарных частиц 219–221
Комптона длина волны 224
координатные сетки 15
координатная скорость 172
Коттлера метрика 263
кривизна 237, 242–244
— скалярная 236
— наблюдаемая 253–257
- Кристоффель Э. Б. 9
— символы 9, 22, 38

- Лагранжа функция 172
 Лапласа оператор 64
 Леви-Чивита Т. 10
 — параллельный перенос 10
 л-член 236, 245, 256
- магнитный “заряд” 85
 Максвелла уравнения 78, 82–85
 Маха принцип 238
 метрический тензор 10, 33
 — наблюдаемый тензор 19
 Минковского уравнения 92, 108
 монадный вектор 16
 μ -вакуум 242, 242, 247
 — физические свойства 249
- негеодезическое движение 31
 неньютоновские силы гравитации
 245, 260, 263
 непрерывности уравнение 80
 нуль-частицы 30
 нуль-пространство (полностью вы-
 рожденное пространство)
 30, 31, 178, 266, 287
- операторы проецирования 16
- Павлов Н. В. 83
 Папалетру А. 33
 Петров А. З. 239
 — теорема 242
 — классификация 240
- Планка тензор 168–170
 Пойнтинга вектор 97
 производная 54
 пространственное сечение 15
 псевдориманово пространство 9
 псевдотензоры 48
 пустота 235, 238, 247
- Риман Б. 8
 Римана-Кристоффеля тензор кри-
 визны 253
 риманово пространство 8
- Риччи тензор 86
- свёртывание тензоров 40
 сигнатура пространства 8, 172, 241
 Синг Дж. Л. 243, 250, 276
 скаляр 36
 скалярное произведение 42
 след тензора 41
 сопутствующий наблюдатель 15
 состояния уравнение 250
 сохранение электрического заряда
 закон 79
 спин-импульс 165, 175
 спиральность 225
 Станюкович К. П. 86
- тело отсчёта 15
 тензор 36
 Терлецкий Я. П. 277
 Т-классификация материи 247
 траектории 10
- умножение тензоров 40
 уравнения движения 9, 24
 — электрически заряженной
 частицы 101–105
 — свободной частицы 25–30
 — частицы со спином 181, 184
- физически наблюдаемые величины
 13–16
- хронометрические инварианты 16
- цилиндр событий 197
- чёрная дыра 265
- Шварцшильда метрика 262
- эйконал (фаза волны) 27
 — уравнение 27, 31
 Эйнштейн А. 235, 238
 — постоянная 236

- уравнения 236
- пространства 239–245, 261
- тензор 236
- электромагнитного поля тензор 72
- элементарные частицы 219–224
- энергии-импульса тензор 96, 236,
245–248

- якобиан 50

Изображение на обложке и титульном листе: загадочная гравюра на дереве неизвестного средневекового художника. Её называют *гравюра Фламариона*, так как она воспроизведена на стр. 163 книги Камилла Фламариона *L'Atmosphère: Météorologie populaire* (Париж, 1888 г.), излагающей метеорологию для широкой аудитории. На этой гравюре по дереву изображён человек, вглядывающийся сквозь атмосферу Земли, как если бы это был занавес, позволяющий заглянуть внутрь Вселенной. Подпись к гравюре гласит: “Un Missionnaire du moyen âge raconte qu’il avait trouvé le point où le ciel et la Terre se touchent. . .”, что переводится как “Средневековый миссионер рассказывает, что он нашел точку, где встречаются небеса [в смысле “небо”] и Земля. . .”

Формат книги: 60 × 90 1/16

Гарнитура: Темрога TLF

Основной кегль: 11 пт

Опечатки исправлены: 20.12.2023

Поля, вакуум и зеркальная Вселенная

Поля и частицы в пространстве-времени
общей теории относительности

Л. Борисова и Д. Рабунский

Перевод с 3-го, переработанного
английского издания

New Scientific Frontiers
London, 2023

ISBN 978-1-7392930-4-8



9 781739 293048