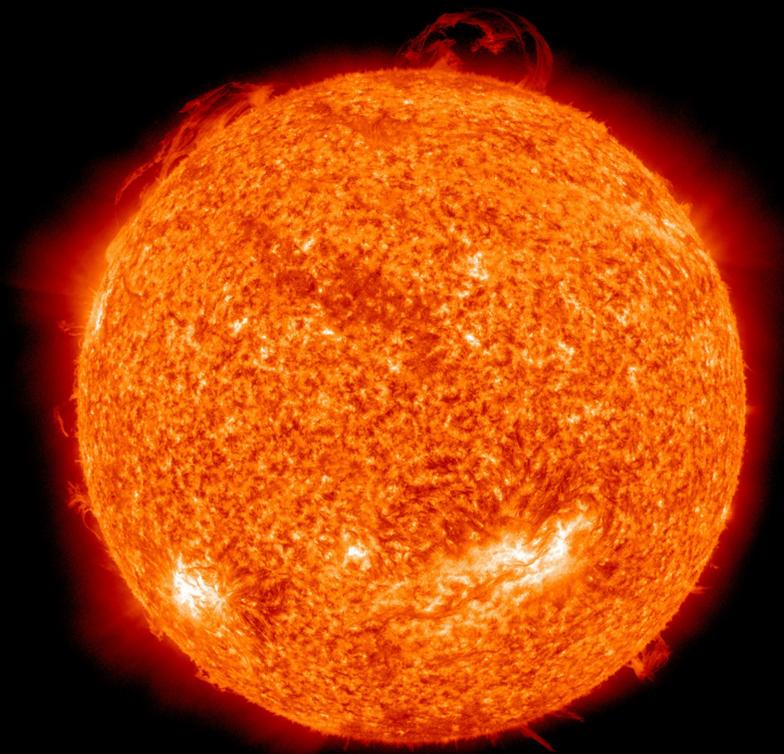


# ВНУТРИ ЗВЁЗД

Второе, исправленное издание на русском языке,  
переведённое с 4-го английского издания

Л. Борисова и Д. Рабунский



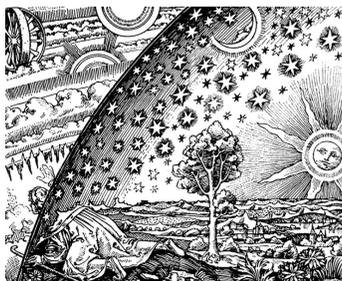
# Внутри звёзд

Теория внутреннего строения звёзд  
и источников звёздной энергии  
на основе общей теории относительности

Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский

Второе, исправленное издание  
на русском языке,  
переведённое с 4-го, исправленного  
английского издания 2025 г.

Первое англ. издание опубликовано в 2013 г.



New Scientific Frontiers  
London, 2025

Аннотация: — В этой книге вводится математическая теория внутреннего строения звёзд и источников звёздной энергии, построенная методами общей теории относительности и сводящаяся к модели жидких звёзд. Такая звезда однородна внутри, с крошечным ядром в центре, которое отделено поверхностью коллапса с радиусом, соответствующим массе звезды. Хотя почти вся масса звезды находится вне ядра (ядро не является чёрной дырой), сила гравитации приближается к бесконечности на поверхности ядра из-за разрыва внутреннего пространства поля звезды. Такой сверхсильной гравитации достаточно для передачи необходимой кинетической энергии атомным ядрам звёздного вещества, чтобы происходил процесс термоядерного синтеза: крошечное ядро каждой звезды — это её светящееся “внутреннее солнце”, а произведённая звёздная энергия затем передаётся на поверхность звезды за счёт теплопроводности. Введена новая классификация звёзд по пространственному разрыву их полей: рассматриваются обычные звёзды (в диапазоне от карликов до сверхгигантов), звёзды Вольфа-Райе, нейтронные звёзды (и пульсары) и чёрные дыры. Введённая жидкостная модель согласуется с новыми наблюдательными данными в пользу состояния конденсированной материи внутри звёзд; в частности, с тем, что Солнце состоит из высокотемпературного жидкометаллического водорода.

© Л. Б. Борисова и Д. Д. Рабунский 2013, 2014, 2023, 2025

Соглашение об авторском праве: — Все права защищены. Эта книга опубликована и распространяется в соответствии с “Будапештской инициативой открытого доступа”. Это означает, что электронное копирование, печать и распространение этой книги для некоммерческого, академического или индивидуального использования может осуществляться любым пользователем без разрешения и без оплаты. Любая часть этой книги, цитируемая или используемая каким-либо образом в других публикациях, должна содержать ссылку на эту публикацию. Никакая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме (включая хранение на любом носителе) для коммерческого использования без предварительного разрешения владельца авторских прав. Запросы на разрешение воспроизведения любой части этой книги для коммерческого использования должны быть адресованы авторам. Авторы сохраняют за собой право использовать эту книгу целиком или её часть в любых других публикациях и любым способом, который они сочтут нужным. Настоящее Соглашение об авторском праве остаётся в силе, даже если Авторы передадут авторские права на эту книгу другому лицу. Настоящим Авторы ограждают Издателя от любых претензий или обязательств, касающихся авторства, публикации или распространения этой книги.

Эта книга была набрана и сверстана с использованием настольной издательской системы L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

New Scientific Frontiers — издательство, зарегистрированное в Nielsen Book Services Ltd., Уокинг, графство Суррей, Великобритания.

ISBN: 978-1-0683575-2-7

Опубликовано в Великобритании.

## Содержание

Предисловие .....	5
Предисловие к 1-му изданию .....	8
Предисловие ко 2-му русскому изданию .....	11
Благодарности .....	12
Глава 1 Постановка задачи	
1.1 Новая теория внутреннего строения звёзд .....	13
1.2 Моделирование звезды методами общей теории относительности .....	16
1.3 Физические наблюдаемые величины .....	26
Глава 2 Жидкие звёзды и жидкое Солнце	
2.1 Введение метрики пространства жидкой звезды. Уравнения Эйнштейна, удовлетворяющие этой метрике .....	45
2.2 Внешний разрыв пространства поля Солнца совпадает с поясом астероидов .....	58
2.3 Геометрический смысл разрыва внешнего пространства звезды .....	65
2.4 Сила гравитации, действующая внутри жидкой звезды ..	68
2.5 Решение уравнений закона сохранения: давление и плотность внутри звёзд .....	70
2.6 Механизм генерации звёздной энергии согласно жидкостной модели звёзд и диаграмме масса-светимость ...	72
2.7 Характеристики пространства внутри жидкой звезды ...	79
2.8 Уравнения Эйнштейна во внутреннем поле жидкой звезды .....	81
2.9 Метрика внутреннего пространства вращающейся жидкой звезды .....	84
2.10 Стационарное электромагнитное поле вращающейся жидкой звезды .....	84

2.11	Уравнения Максвелла в электромагнитном поле вращающейся жидкой звезды.....	87
2.12	Заключение .....	89
Глава 3 Звёздный ветер		
3.1	Условие второй космической скорости для звезды.....	93
3.2	Светоподобные частицы внутри жидкой звезды .....	98
3.3	Частицы звёздного вещества внутри жидкой звезды . . . .	104
3.4	Заключение .....	111
Глава 4 Чёрные дыры		
4.1	Невращающиеся жидкие коллапсары .....	114
4.2	Вселенная как огромный жидкий коллапсар.....	117
4.3	Давление и плотность внутри жидких коллапсаров .....	119
4.4	Внутренние силы гравитации. Внутреннее красное смещение.....	120
4.5	Состояние сколлапсировавшего жидкого вещества .....	122
4.6	Время течёт в обратном направлении внутри коллапсаров .....	126
4.7	Пограничные условия в жидком коллапсаре.....	127
4.8	Вращающиеся жидкие коллапсары.....	129
4.9	Заключение .....	131
Литература.....		134

---

## Предисловие

Учёный часто сталкивается с устоявшимися представлениями, которые когда-то были предметом споров, иногда полемики. Часто мы используем эти идеи, не зная ни их исторического развития, ни предположений, на которых они основаны. Мы редко останавливаемся, чтобы обдумать обоснованность устоявшейся идеи. Это неудивительно, поскольку именно так мы строим наше здание физических теорий, “стоя на плечах гигантов”, перефразируя Исаака Ньютона.

Тем не менее, устоявшиеся идеи и теории необходимо подвергать сомнению и пересматривать, когда становятся доступными новые данные или новые теории, которые противоречат им или проливают на них новый свет. Нам не нужно бояться новой информации, которая может опровергнуть принятые идеи. Ведь именно так возникают новые парадигмы и достигается прогресс.

Вопрос о том, являются ли звёзды газообразными или жидкими, — это дискуссия, на которую не обращает внимания большинство учёных. И всё же это было предметом ожесточённых дискуссий в конце 19-го и начале 20-го веков, когда известные физики занимали позиции по обе стороны этой баррикады. Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский кратко излагают историю этих дебатов и историю того, как они были втянуты в решение этой научной проблемы.

Недавние свидетельства жидкой природы звёзд, в частности обширные исследования, проведённые Пьером-Мари Робиталем, предложившим модель Солнца, состоящего из жидкометаллического водорода\*, заставляют нас вернуться к этому вопросу. Интересно, что звёздная плазма моделируется с использованием магнитогидродинамики, т.е. динамики магнитной жидкости, комбинации

---

\*Robitaille P.-M. A high temperature liquid plasma model of the Sun. *Progress in Physics*, 2007, vol. 3, no. 1, 70–81.

Масквелловских уравнений электромагнетизма и уравнений гидромеханики Навье-Стокса\*. Магнитогидродинамика также используется для моделирования жидких металлов. Это указывает на то, что теория жидких звёзд весьма правдоподобна для объяснения солнечных и звёздных астрофизических данных.

Мой интерес к этой области исследований проистекает из моих астрофизических исследований звёздных атмосфер звёзд Вольфа-Райе, которые я проводил на физическом факультете университета Оттавы для моей диссертации на тему “Лазерное действие в плазме C IV, N V и O VI, охлаждаемой адиабатическим расширением”. Звёзды Вольфа-Райе демонстрируют потерю массы и расширение звёздной атмосферы. Это приводит к инверсии некоторых атомных переходов за счёт быстрого охлаждения расширяющейся плазмы и рекомбинации свободных электронов в более высокие возбуждённые состояния ионов, а также к лазерному воздействию на соответствующих линиях излучения. Этот физический механизм был предложен в качестве объяснения наиболее выдающихся спектральных линий, наблюдаемых в спектрах звёзд Вольфа-Райе.

В этой книге Лариса Борисова и Дмитрий Рабунский предлагают общую релятивистскую теорию внутреннего строения жидких звёзд — модель, которой до сих пор не было. Они получили эту модель, используя математический формализм, впервые введённый Абрамом Леонидовичем Зельмановым для вычисления физически наблюдаемых величин в четырёхмерном псевдоримановом пространстве, известный как “теория хронометрических инвариантов”. Этот математический аппарат позволяет вычислять физически наблюдаемые (хронометрически инвариантные) тензоры любого ранга на основе операторов проецирования на линию времени и пространственное сечение наблюдателя. Основная идея заключается в том, что физически наблюдаемые величины, регистрируемые наблюдателем, должны быть результатом проекции четырёхмерных величин на линию времени и на пространственное сечение (локальное трёхмерное пространство) наблюдателя.

Этот анализ позволяет им предложить классификацию звёзд, основанную на трёх основных типах: обычные звёзды (покрыва-

---

\*Tajima T. and Shibata K. *Plasma Astrophysics*. Perseus, Cambridge, 2002; Kulrud R. M. *Plasma Physics for Astrophysics*. Princeton Univ. Press, Princeton, 2005.

ющие диапазон от белых карликов до сверхгигантов), подтипом которых являются звёзды Вольфа-Райе, нейтронные звёзды и пульсары, а также коллапсары (чёрные дыры). Их теория также даёт модель внутреннего строения нашей Солнечной системы. Она объясняет наличие пояса астероидов, общую структуру планет внутри и вне этой орбиты и излучение энергии планетой Юпитер.

Окончательным тестом любой теории звёздной структуры является соотношение звёздной массы и светимости, которое является основным эмпирическим соотношением наблюдательной астрофизики. Используя свою теорию, авторы могут рассчитать давление внутри звёзд как функцию радиуса, включая центральное давление. Как указывают авторы, температура несжимаемой жидкой звезды не зависит от давления, а только от источника звёздной энергии (в отличие, в частности, от газа, так как он задаётся уравнением состояния идеального газа). Авторы сопоставляют расчётное производство энергии предполагаемого механизма термоядерного синтеза лёгких атомных ядер в гильбертовом ядре (“внутреннем солнце”) звёзд с эмпирическим соотношением массы и светимости наблюдательной астрофизики, чтобы определить плотность жидкого звёздного вещества в гильбертовом ядре.

Эта книга представляет собой солидный вклад в наше понимание строения звёзд, сделанный методами общей теории относительности. Она даёт релятивистскую основу для теории жидких звёзд. Она продвигает новые идеи о строении звёзд и планетных систем и предлагает новый подход к строению звёзд и их эволюции, который должен помочь нам лучше понять звёздную астрофизику.

Оттава, 2 сентября 2013

Пьер Миллет

Астрофизические исследования  
звёздных атмосфер, физический  
факультет университета Оттавы

## Предисловие к 1-му изданию

Три десятилетия назад, в 1983 году, я начал изучать историю происхождения теории газовых звёзд. Меня вдохновил на это профессор Кирилл Петрович Станюкович (1916–1989), выдающийся учёный в области газовой динамики и общей теории относительности, с которым мы с Ларисой были в дружеских отношениях на протяжении многих лет. Станюкович рассказал мне, что вскоре после того, как Ганс Бете предположил, что термоядерный синтез является источником энергии звёзд, в 1939 году астрофизики начали попытки адаптировать газовую модель звёзд к термоядерному синтезу. Во многих случаях их предположения были настолько искусственными по отношению к самой газовой динамике, что только отсутствие другого предположения могло бы оправдать их модели. Станюкович также рассказал о многих очевидных доказательствах газовой динамики, которые по сути противоречат газовой модели звёзд.

Затем я прочитал статьи-первоисточники по теории газовых звёзд, опубликованные в начале 20-го века. Я сразу обнаружил, что “ядро” этой теории, состоящее из уравнений механического и теплового равновесия внутри звёзд, не зависит от того, состоят ли звёзды из газа или из чего-то другого. Только позже, вводя уравнение состояния идеального газа в эти уравнения, теория даёт так называемые газовые звёзды и всё разнообразие газовых моделей.

Затем мы были увлечены другими исследованиями, в основном по общей теорией относительности, так что астрофизика выпала из сферы нашего внимания почти на 25 лет.

Летом 2007 года к нам в первый раз приехал в гости профессор Пьер-Мари Робиталь. Работая в Университете штата Огайо, Пьер на протяжении многих лет проводил глубокие экспериментальные исследования в области теплофизики и ядерного магнитного резонанса (который генерирует микроволновое излучение). Он обратил

наше внимание на новые астрофизические свидетельства того, что Солнце и звёзды жидкие. Эти свидетельства появились лишь в последнее десятилетие. Как-то раз, ярким днём во время прогулки со мной в ближайшем парке Пьер указал на диск Солнца в небе и произнёс: “Смотрите, это — жидкая сфера.” Однако недостаток математических обоснований в то лето не позволил нам построить строгую математическую теорию жидких звёзд.

Несколько месяцев спустя, в том же 2007 году, Лариса и я взялись перевести на английский язык две классические статьи по общей теории относительности, написанные в 1916 году Карлом Шварцшильдом. В одной из этих работ он ввёл метрику пространства сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, что принесло ему затем большую посмертную известность. Мы знали, что метрика жидкой сферы Шварцшильда не может быть использована в качестве модели для жидких звёзд. Это связано с некоторым конкретным ограничением, содержащимся в этой метрике. Однако сразу после прочтения первоначального варианта математического вывода этой метрики, опубликованного в его статье 1916 г., мы обнаружили, что это ограничение было введено им искусственно, чтобы сделать звёздное гравитационное поле непрерывным (не содержащим разрыва). Если бы удалось вывести настоящую метрику жидкой сферы, свободную от каких-либо искусственных ограничений, наложенных на геометрию пространства, мы смогли бы построить математическую теорию жидких звёзд.

Путь вперёд наконец был найден: теперь мы знали, что делать дальше. Для проверки Лариса сразу же вывела истинную метрику жидкой сферы, затем вычислила некоторые приложения для Солнца. Она обнаружила, что, когда Солнце представлено в виде жидкой сферы, его гравитационное поле имеет разрыв, соответствующий максимальной концентрации вещества в поясе астероидов; таким образом, разрыв пространства препятствует тому, чтобы вещество сформировалось в планету на этой орбите. Поэтому мы убедились, что находимся на правильном пути. (Дэвид Джонс, редактор *New Scientist*, писал в 1981 г.: “Как известно, все основные научные открытия были сделаны или в ходе работы над другими проблемами или в результате случайных наблюдений.”)

Такова эта история вкратце. Весной 2013 г. мы завершили математическую теорию жидких звёзд. Эта теория даёт основную

жидкостную модель в соответствии с общей теорией относительности, которые вместе охватывают все известные типы звёздных объектов в самом широком диапазоне: от сверхгигантов до чёрных дыр. В этой книге мы излагаем все основные элементы этой теории, за исключением конкретных деталей механизма звёздной энергии (это остаётся вне темы книги, которая в основном посвящена внутреннему строению звёзд).

Пушино, 6 августа 2013

Д. Д. Рабунский

## Предисловие ко 2-му русскому изданию

В данном издании, пересмотренном и исправленном, я исправил ошибку в определении метрики пространства-времени вращающегося жидкого тела, к сожалению имевшую место в предыдущих изданиях. Все расчёты, затронутые этой ошибкой, были исправлены (или опущены). Исправления затронули параграфы, касающиеся вращающихся звёзд и вращающихся чёрных дыр.

Пушино, 28 декабря 2024

Д. Д. Рабунский

## Благодарности

Лариса и я хотели бы поблагодарить Пьера-Мари Робиталья (Огайо, США) за многодневные научные обсуждения и дружескую поддержку во время двух его длительных визитов к нам через океан и позже. Мы признательны ему более всего. Его вклад поистине неоценим.

Мы также очень признательны Пьеру А. Миллету (Оттава, Канада), который, будучи экспертом как в звёздной астрофизике, так и в общей теории относительности, внимательно прочитал черновик этой книги и внёс полезные предложения.

Мы также хотели бы выразить нашу искреннюю благодарность Индрану Суэндро и его жене Сюзанне Биллхарц, США. Наше общее обсуждение этой книги и их помощь в редактировании сделала книгу гораздо лучше, чем она была в первом черновике.

Мы также признательны Патрику Маркэ (Калé, Франция): наши дискуссии с ним по общей теории относительности всегда дают нам много нового, в том числе импульс для новых научных исследований.

Отдельная признательность — Анатолию Васильевичу Белякову (Тверская Карелия, Россия), который взял на себя перевод этой книги на русский язык.

Пушино, 15 февраля 2023

Дмитрий Рабунский

## 1.1 Новая теория внутреннего строения звёзд

В этой книге мы вводим новую математическую теорию внутреннего строения звёзд и источников звёздной энергии. Теория основана на общем представлении о звезде и её поле согласно общей теории относительности.

Это — альтернатива традиционной теории звёзд, введённой в 1920-х годах Артуром Эддингтоном [1] и другими в рамках классической механики и термодинамики.

Как известно, традиционная теория привела к *модели газообразных звёзд*: звёзды рассматриваются как газообразные сферы, состоящие в основном из водорода и очень неоднородной внутренней части, так что водород чрезвычайно горячей и плотной центральной области используется как топливо в процессе генерирования звёздной энергии. Предполагается, вслед за Гансом Бете [2], что этот экзотермический процесс представляет собой термоядерный синтез, производящий гелий из водорода. Две другие альтернативные газовые модели отличаются от теории Эддингтона в некоторых деталях. Эдвард Милн [3] предположил наличие двух (или более) разных состояний материи внутри звезды. Николай Козырев [4] пришёл к своеобразной модели с низкой плотностью и температурой внутри звёзд и неядерным источником звёздной энергии.

Другая теория внутреннего строения звёзд получила широкое распространение в 1920–1930-х годах благодаря Джеймсу Джинсу [5, 6]. Это — *модель жидких звёзд*. Публичная дискуссия между Джинсом, защищавшим жидкостную модель, и Эддингтоном, последователем газовой модели, была зафиксирована в десятках коротких сообщений, опубликованных ими в научных журналах. Действительно, Эддингтон в конце концов победил. Несмотря на

множество астрофизических свидетельств того, что звёзды жидкие, теория Джинса не имела прочной математической основы. Его теория была основана на анализе наблюдений и аргументах, а не на математической модели. Напротив, теория газообразных звёзд была математически хорошо обоснована Эддингтоном. В частности, математическая модель газообразных звёзд даёт теоретический вывод соотношения масса-светимость, которое является одним из основных соотношений наблюдательной астрофизики\*. Это было “козырной картой” газовой модели: так как газовая модель предсказала соотношение масса-светимость, был сделан вывод, что эта теория верна в целом, а все её несоответствия наблюдательному анализу являются лишь некоторыми “трудностями”, которые необходимо разрешить в будущем. Таким образом, модель газообразных звёзд стала общепринятой моделью на десятилетия вперёд, вплоть до настоящего времени.

Теперь мы должны сделать важное замечание. Как известно, ядро математической теории внутреннего строения звёзд составляют два уравнения: уравнение механического равновесия и уравнение теплового равновесия. Механическое равновесие означает, что вес любой единицы объёма звёздного вещества приводится в равновесие давлением изнутри звезды. Тепловое равновесие (энергетический баланс) означает, что энергия, производимая в любой единице объёма звёздного вещества, приводится в равновесие потоком энергии (излучением, конвекцией или теплопроводностью) изнутри звезды к её поверхности. Эти два основных уравнения теории взяты из общей физики, и они *не зависят* от того, состоят ли звёзды из газа, жидкости или чего-то ещё. Только затем, вводя уравнение состояния идеального газа (и много других частных предположений) в основные уравнения, традиционная теория приводит к газообразным звёздам и другим выводам, включая соотношение масса-светимость.

Теория жидких звёзд Джинса не может следовать этому пути. Уравнение состояния идеальной жидкости, данное классической физикой, настолько просто, что не содержит характеристик звёздной материи, необходимых для дальнейших выводов с помощью

---

\* Наиболее детальный вывод соотношения масса-светимость в рамках модели газовых звёзд приведён в части I статьи Н. А. Козырева [4].

уравнений равновесия.

Вместо всех этих соображений классической механики и термодинамики мы предлагаем совершенно иной подход к проблеме. Он основан на рассмотрении звезды и её поля согласно общей теории относительности. Мы рассматриваем жидкие звёзды: это соответствует некоторым новым наблюдательным данным о состоянии конденсированного вещества внутри звёзд; в частности — данным о том, что Солнце состоит из высокотемпературного жидкометаллического водорода [7–10].

В рамках общей теории относительности структура, вещество и поле такой звезды характеризуются метрикой Шварцшильда для сферы, заполненной несжимаемой жидкостью. Недавний теоретический результат, полученный Л. Борисовой [11, 12], показал, что если представить Солнце в виде жидкой сферы согласно этой метрике, то поле Солнца имеет пространственный разрыв в поясе астероидов: это означает, что разрыв пространства препятствует формированию вещества в виде планеты на этой орбите. Поэтому мы уверены, что идём по правильному пути.

Мы выводим уравнения Эйнштейна (уравнения поля) в виде, который моделирует звёзды как жидкие сферы: это — частная форма уравнений Эйнштейна, которая может удовлетворять или не удовлетворять конкретной метрике пространства. Поэтому затем мы доказываем, что полученный частный вид уравнений поля удовлетворяет метрике Шварцшильда для жидкой сферы.

Затем на основе тензора энергии-импульса идеальной жидкости (стоящего в правой части уравнений поля) мы выводим закон сохранения жидкого вещества обычных звёзд. Решая полученные уравнения сохранения энергии-импульса, мы получаем давление и плотность жидкого вещества внутри звёзд. Затем мы получаем формулу для светимости звёзд в рамках жидкостной модели. Мы исследуем, как эта теоретически выведенная формула может быть совместима с соотношением масса-светимость (которое является основным эмпирическим соотношением наблюдательной астрофизики). В результате мы получаем физические характеристики механизма, производящего энергию внутри звёзд.

Относительно самого механизма звёздной энергии мы заключаем, что это преобразование вещества в излучение на поверхности крошечного центрального “ядра” внутри каждой звезды. Ядро мо-

жет иметь плотность, отличную от плотности остального вещества звезды (жидкая сфера внутри однородна), и отделено поверхностью коллапса с радиусом, определяемым массой звезды. Несмотря на то, что почти вся масса звезды находится вне этого ядра (ядро не является чёрной дырой), сила гравитации стремится к бесконечности на поверхности ядра из-за пространственного разрыва на ней внутреннего поля звезды. Такой сверхсильной силы гравитации достаточно для передачи необходимой кинетической энергии лёгким атомным ядрам звёздного вещества, чтобы начать процесс термоядерного синтеза. Энергия, производимая термоядерным синтезом, — и есть та самая энергия, которую излучают звёзды. Иными словами, крошечное ядро каждой звезды является её светящимся “внутренним солнцем”, а произведённая там звёздная энергия затем передаётся на физическую поверхность звезды за счёт теплопроводности (что закономерно для жидких сред).

Таков наш план на следующие главы. В результате мы получаем математическую теорию жидких звёзд и источников звёздной энергии в соответствии с общей теорией относительности.

Прежде чем перейти к выполнению всех этих этапов работы, в следующем §1.2 мы рассмотрим метрики пространства-времени, которые мы используем в нашей теории. Затем мы вводим новую классификацию звёзд. Эта классификация основана на расположении пространственного разрыва в поле звезды относительно её поверхности (пространственный разрыв рассчитывается по метрике и собственным параметрам звезды).

В конце этой главы, в §1.3 мы дадим детальный обзор математического аппарата физически наблюдаемых величин в пространстве-времени общей теории относительности, который нам понадобится для наших дальнейших вычислений.

## **1.2 Моделирование звезды методами общей теории относительности**

Звёзды — это сферические тела, наполненные веществом и светом. Их поля также сферически симметричны. Поэтому при рассмотрении звезды в терминах общей теории относительности структура, вещество и поле такого объекта должны задаваться метрикой сферически-симметричного пространства.

Среди метрик пространства-времени, известных благодаря общей теории относительности, три основные метрики описывают сферически симметричные поля. Это — метрика Шварцшильда точечной массы, метрика Шварцшильда сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, и метрика де Ситтера, описывающая сферическое распределение физического вакуума ( $\lambda$ -поля, определяемого  $\lambda$ -членом в уравнениях поля Эйнштейна). Все эти три метрики будут использоваться нами при рассмотрении звёзд.

### 1.2.1 Метрика точечной массы

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1.1)$$

была введена в 1916 году Карлом Шварцшильдом [13]. Эта метрика описывает поле сферически-симметричного массивного тела на настолько большом расстоянии от него, что физическими размерами этого тела можно пренебречь (предполагая, что тело является материальной точкой).

Метрика записывается в сферических координатах  $r$ ,  $\phi$ ,  $\theta$ , начало которых совпадает с данной материальной точкой. Кроме того, здесь  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  гильбертов радиус для данной материальной точки\*, тогда как  $M$  масса данного точечного тела (т.е. масса источника данного поля).

Согласно метрике (1.1), такое пространство не вращается и не деформируется. Гравитационно-инерциальная сила (подробности см. в §1.3) в таком пространстве выводится на основе только компоненты  $g_{00}$  фундаментального метрического тензора. Как видно из данной метрики,  $g_{00}$  в этом случае (1.1) имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}. \quad (1.2)$$

---

\*Это не то же самое, что физический радиус тела. На расстоянии гильбертова радиуса от центра тяжести массивного тела ( $r = r_g$ ) происходит гравитационный коллапс: в пространстве без вращения это — состояние, при котором компонента  $g_{00}$  фундаментального метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  равна нулю ( $g_{00} = 0$ ). Подробнее см. §4.1 и §4.2. *Гильбертов радиус* был введён Давидом Гильбертом (1862–1944), который рассмотрел его в 1917 году [15] на основе метрики Шварцшильда для точечной массы. Он также известен как *радиус Шварцшильда*, несмотря на то, что Карл Шварцшильд (1873–1916) никогда не рассматривал гравитационный коллапс в своих работах [13, 14].

Дифференцируя гравитационный потенциал  $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$  по  $x^i$ , получаем градиент потенциала

$$\frac{\partial w}{\partial x^i} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (1.3)$$

Затем мы подставляем этот результат в общую формулу для гравитационно-инерциальной силы (1.42), принимая во внимание отсутствие вращения пространства. В итоге мы получаем формулы для ковариантной и контравариантной компонент гравитационно-инерциальной силы

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad F^1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}. \quad (1.4)$$

Как видно из этих формул, гравитационно-инерциальная сила в пространстве точечной массы обусловлена только ньютоновским гравитационным полем, создаваемым этой массой, и обратно пропорциональна квадрату расстояния  $r$  от неё.

Искривление пространства точечной массы обусловлено ньютоновским полем тяготения, создаваемым массивным телом в начале координат. Это — не пространство постоянной кривизны; его кривизна уменьшается по мере удаления от массивного тела (источника поля). На бесконечно большом расстоянии от тела пространство является плоским.

**1.2.2** Пространство, заполненное сферически-симметричным однородным распределением физического вакуума ( $\lambda$ -поле в уравнениях Эйнштейна), не содержит остовов вещества и описывается метрикой де Ситтера

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (1.5)$$

Эта метрика была введена в 1918 году Виллемом де Ситтером [16] как статическая модель Вселенной. Предполагается, что  $\lambda < 10^{-56}$  в космосе, поэтому физический вакуум имеет очень низкую плотность. Современный вариант статической модели Вселенной представлен в [17].

Фундаментальный метрический тензор через свои компоненты в метрике де Ситтера (1.5) показывает, что такое пространство

не деформируется и не вращается. Следовательно, гравитационно-инерциальная сила (1.42) в таком пространстве обусловлена только компонентой  $g_{00}$ , которая имеет вид

$$g_{00} = 1 - \frac{\lambda r^2}{3}. \quad (1.6)$$

Соответственно, после аналогичных вычислений, что и ранее, получаем гравитационно-инерциальную силу

$$F_1 = \frac{\lambda c^2}{3} \frac{r}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}, \quad F^1 = \frac{\lambda c^2}{3} r. \quad (1.7)$$

Это — ньютоновская гравитационная сила, которая пропорциональна расстоянию  $r$ : эта сила ( $\lambda$ -сила) растёт вместе с расстоянием, на котором она действует. Если  $\lambda < 0$  (наблюдаемая плотность вакуума положительна), то это — сила притяжения. Если  $\lambda > 0$  (наблюдаемая плотность вакуума отрицательна), то это — сила отталкивания. См. главу 5 нашей книги [18], где мы подробно рассмотрели физический вакуум.

Искривление пространства де Ситтера обусловлено ньютоновским гравитационным полем, создаваемым физическим вакуумом ( $\lambda$ -полем), однородно заполняющим пространство. Кривизна одинакова везде в таком пространстве. Другими словами, это — пространство постоянной кривизны.

**1.2.3 Метрика сферы несжимаемой жидкости** впервые была введена в 1916 году Карлом Шварцшильдом [14] в урезанном виде, содержащем существенные ограничения. Он искусственно предварительно наложил ограничения при выводе метрики, чтобы сделать поле не содержащим разрыва\*. Истинная метрика сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, оставалась неизвестной до 2009 года, когда Л. Борисова вывела её в наиболее полной форме [11, 12], свободной от каких-либо ограничений и, таким образом, учитывающей разрыв пространства.

Модель звёзд как жидких сфер играет ключевую роль в нашей теории. Поэтому рассмотрим метрику сферы, заполненной несжи-

---

\*На самом деле, как только на метрику предварительно наложено какое-либо ограничение, геометрия метрического пространства искусственно урезается. В этом смысле метрика Шварцшильда, введённая в 1916 г., не является подлинной метрикой пространства жидкой сферы.

маемой жидкостью, в полном виде

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1.8)$$

как это выведено в статьях [11, 12]. Здесь  $a = \text{const}$  есть физический радиус жидкой сферы, тогда как  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  гильбертов радиус, рассчитанный по массе  $M$  жидкости, которая является источником поля. Полный вывод метрики, содержащий все необходимые детали, будет воспроизведён в §2.1 книги, где мы применим эту метрику к обычным звёздам.

Метрика (1.8) записывается для расстояний  $r < a$ . Это — “внутренняя метрика” жидкой сферы. На поверхности сферы ( $r = a$ ) эта метрика совпадает с метрикой точечной массы. Кроме того, как было доказано в [11] (этот вывод будет повторён в §2.1 этой книги), “внешняя метрика” жидкой сферы ( $r > a$ ) также совпадает с метрикой точечной массы: внешнее поле жидкой сферы совпадает с ньютоновским гравитационным полем точечной массы.

Как видно из метрики жидкой сферы (1.8), такое пространство не деформируется и не вращается. Следовательно, согласно определению гравитационно-инерционной силы (1.42), сила в таком пространстве обусловлена только  $g_{00}$ . В метрике (1.8) мы имеем

$$g_{00} = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2. \quad (1.9)$$

После аналогичных вычислений, что и ранее, мы получаем

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{1}{\left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (1.10)$$

$$F^1 = -\frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (1.11)$$

Поскольку  $r < a$  внутри сферы, то в ней  $F_1 < 0$ . Следовательно, это — сила притяжения. Её численное значение пропорционально расстоянию  $r$ . Эта сила равна нулю в центре сферы и достигает максимального значения на поверхности.

Можно показать, что кривизна такого пространства, обусловленная упомянутым полем тяготения, увеличивается по мере удаления от центра жидкой сферы к её поверхности. Другими словами, пространство внутри жидкой сферы не является пространством постоянной кривизны (см. §2.3 этой книги).

**1.2.4** Здесь мы предлагаем новый метод моделирования звёзд на основе математических методов общей теории относительности.

Рассмотрим звёзды как сферические тела, состоящие из жидкости. В рамках этой модели внутреннее строение, вещество и поле звезды описываются метрикой сферы, заполненной несжимаемой жидкостью (1.8). Как было показано выше, сила тяготения при этом возрастает пропорционально удалению от центра звезды. Внешнее поле звезды описывается метрикой точечной массы (1.1). Во внешнем поле действует обычная ньютоновская гравитационная сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния от звезды.

Поле жидкой сферы как таковое не везде непрерывно. Согласно внешней метрике (1.1) и внутренней метрике (1.8) жидкой сферы, её поле имеет *пространственный разрыв*, который появляется на двух расстояниях от её центра. В связи с этим мы сейчас введём новую классификацию звёзд согласно общей теории относительности. Сейчас мы объясним, как это делается.

Разрыв пространства происходит из-за нарушения *сигнатурных условий* его метрики. Это означает, что пространство имеет сингулярность в той области (поверхности или объёме), где нарушается хотя бы одно из сигнатурных условий. Сигнатурные условия знакопеременной диагональной метрики (+---) четырёхмерного псевдориманова пространства (базового пространства-времени общей теории относительности) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &> 0 \\ g_{00} g_{11} &< 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &> 0 \\ g = g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} &< 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.12)$$

Первые три известны как *слабые сигнатурные условия*. Четвёртое известно как *сильное сигнатурное условие*. Если одно или все слабые сигнатурные условия нарушены, а сильное сигнатурное условие сохраняется, то это — *устраняемая сингулярность*. При нарушении сильного сигнатурного условия пространство-время имеет *неустраняемую сингулярность*: в этом случае решение обычно выпадает из рассмотрения, поскольку оно “не имеет физического смысла”. Да, возможно, что кто-то не смог увидеть в этом физического смысла. Тем не менее, эти случаи очень важны математически. Поэтому мы будем рассматривать любую сингулярность пространства (разрыв пространства).

Итак, рассмотрим пространство жидкой сферы. Согласно внешней метрике сферы (1.1) первое сигнатурное условие нарушается ( $g_{00} = 0$ ) на расстоянии  $r = r_g$  от центра

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{r_g}{r} = 0 \\ g_{00} g_{11} &= -1 < 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &= r^2 > 0 \\ g &= -r^4 \sin^2 \theta < 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.13)$$

Внутренняя метрика сферы (1.8) показывает, что второе, третье и четвёртое сигнатурные условия нарушаются на расстоянии

$$r = r_{br} = \sqrt{\frac{a^3}{r_g}} \quad (1.14)$$

от центра сферы, на котором вышеупомянутые три функции стремятся к бесконечности\*

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= \frac{9}{4} \left(1 - \frac{r_g}{a}\right) > 0 \\ g_{00} g_{11} &\rightarrow -\infty \\ g_{00} g_{11} g_{22} &\rightarrow \infty \\ g &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\}. \quad (1.15)$$

---

\*Как известно, функция имеет разрыв при стремлении к бесконечности.

Это означает, что поле жидкой сферы имеет пространственный разрыв на двух расстояниях от её центра

1. Первый разрыв пространства происходит на поверхности, которая сферически охватывает центр тяжести жидкой сферы на расстоянии гильбертова радиуса  $r = r_g$ . Это — поверхность гравитационного коллапса согласно условию  $g_{00} = 0$  в этом разрыве пространства. Иными словами, хотя сама жидкая сфера может не быть коллапсаром, она всегда содержит центральное “ядро”, которое отделено от остального жидкого вещества поверхностью гравитационного коллапса. В случае, когда жидкая сфера является звездой, каждая звезда содержит такое ядро. Это ядро намного меньше физического радиуса обычных звёзд: например, радиус сколлапсировавшего ядра (гильбертов радиус) Солнца составляет  $r_g = 2,9 \times 10^5$  см (2,9 км), а физический радиус Солнца составляет  $7,0 \times 10^{10}$  см (700 000 км). Поэтому мы называем первый разрыв пространства *внутренним пространственным разрывом*;
2. Второй разрыв пространства происходит на сферической поверхности, которая окружает жидкое тело на расстоянии, равном  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$ . Это расстояние намного больше, чем физический радиус обычных звёзд. Таким образом, это — *внешний пространственный разрыв*, в отличие от разрыва внутреннего пространства на гильбертовом радиусе. Например, второй (внешний) пространственный разрыв поля Солнца происходит на расстоянии  $r_{br} = 3,4 \times 10^{13}$  см = 340 000 000 км = 2,3 а.е. Этот разрыв пространства находится внутри пояса астероидов, вблизи орбиты максимальной концентрации астероидов (пояс астероидов расположен от 2,1 а.е. до 4,3 а.е. от Солнца). Это означает, что внешний разрыв пространства в поле Солнца не позволяет веществу сформироваться в общее физическое тело (такое, как планета) на этой орбите.

Если физический радиус  $a$  звезды совпадает с гильбертовым радиусом  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ , это — гравитационный коллапсар. В этом случае ( $r_g = a$ ) внутренняя метрика жидкой сферы (1.8) принимает следующий вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (1.16)$$

Эта метрика при условии  $a^2 = \frac{3}{\lambda} > 0$  (т.е. когда  $\lambda > 0$ ), имеет тот же вид, что и метрика де Ситтера (1.5)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\lambda r^2}{3}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.17)$$

описывающая сферическое распределение физического вакуума ( $\lambda$ -поле). Такой коллапсар состоит из жидкости в состоянии близком к состоянию физического вакуума высокой плотности.

Итого эта новая модель жидких звёзд позволяет нам ввести новую классификацию звёзд согласно положению пространственного разрыва в поле звезды относительно её физической поверхности:

### **Тип I: обычные звёзды, включая Солнце**

Радиус сколлапсировавшего ядра, т.е. гильбертов радиус  $r_g$  обычной звезды, на много порядков меньше её физического радиуса  $a$  (т.е.  $r_g \ll a$ ). Внешний пространственный разрыв  $r_{br}$  расположен далеко от обычной звезды в космосе ( $r_{br} \gg a$ ). Это — почти все видимые звёзды: сверхгиганты, гиганты, Солнце, коричневые карлики и даже белые карлики. Мы рассмотрим обычные звёзды в главе 2;

### **Тип Ia: звёзды Вольфа-Райе**

Они почти такие же, как и обычные звёзды, за исключением того, что следует учитывать мощный звёздный ветер, состоящий из частиц звёздного вещества, постоянно вылетающих из звезды (это — свойство, характеризующее звёзды Вольфа-Райе). Звёздный ветер будет рассмотрен в главе 3;

### **Тип II: нейтронные звёзды и пульсары**

Радиус гильбертова ядра близок к физическому радиусу такой звезды ( $r_g \lesssim a$ ), но не достигает его (иначе звезда была бы невидима для наблюдения). Внешний пространственный разрыв  $r_{br}$  расположен во внешнем космосе близко к физической поверхности такой звезды, но не достигает её ( $r_{br} \gtrsim a$ ). Кроме того, пульсары вращаются с большими скоростями, близкими к релятивистским. Поэтому метрика и тензор энергии-импульса такой звезды отличаются от таковых у обычных звёзд;

### **Тип III: чёрные дыры**

Гильбертов радиус  $r_g$  (радиус разрыва внутреннего пространства) и радиус разрыва внешнего пространства  $r_{br}$  такого объ-

Объект	Масса $M$ , грамм	Радиус $a$ , см	Гильберт. радиус $r_g$ , см	$\frac{r_g}{a}$	Разрыв пр-ва $r_{br}$ , см	$\frac{r_{br}}{a}$	Тип
Красный сверхгигант*	$4,0 \times 10^{34}$	$7,0 \times 10^{13}$	$5,9 \times 10^6$	$8,4 \times 10^{-8}$	$2,4 \times 10^{17}$	$3,4 \times 10^3$	I
Белый сверхгигант <sup>†</sup>	$3,4 \times 10^{34}$	$4,8 \times 10^{12}$	$5,0 \times 10^6$	$1,0 \times 10^{-6}$	$4,7 \times 10^{15}$	$9,8 \times 10^2$	I
Солнце	$2,0 \times 10^{33}$	$7,0 \times 10^{10}$	$2,9 \times 10^5$	$4,1 \times 10^{-6}$	$3,4 \times 10^{13}$	$4,9 \times 10^2$	I
Юпитер (протозвезда)	$1,9 \times 10^{30}$	$7,1 \times 10^9$	$2,8 \times 10^2$	$4,0 \times 10^{-8}$	$3,4 \times 10^{13}$	$4,8 \times 10^3$	I
Белый карлик <sup>‡</sup>	$2,0 \times 10^{33}$	$6,4 \times 10^8$	$3,0 \times 10^5$	$4,7 \times 10^{-4}$	$2,9 \times 10^{10}$	$0,45 \times 10^2$	I
Красные карлики	$6,7 \times 10^{32}$	$2,3 \times 10^{10}$	$9,9 \times 10^4$	$4,3 \times 10^{-6}$	$1,1 \times 10^{13}$	$4,8 \times 10^2$	I
Коричневые карлики	$1,5 \times 10^{32}$	$7,0 \times 10^9$	$2,2 \times 10^4$	$3,1 \times 10^{-6}$	$4,0 \times 10^{14}$	$5,7 \times 10^4$	I
Звёзды Вольфа-Райе	$1,0 \times 10^{35}$	$1,4 \times 10^{12}$	$1,5 \times 10^7$	$1,1 \times 10^{-5}$	$4,3 \times 10^{14}$	$3,1 \times 10^2$	Ia
Нейтронные звёзды	$2,6 \times 10^{33}$	$1,0 \times 10^6$	$3,9 \times 10^5$	0,39	$1,6 \times 10^6$	1,6	II
Пульсары <sup>§</sup>	$3,9 \times 10^{33}$	$1,6 \times 10^6$	$5,8 \times 10^5$	0,36	$2,7 \times 10^6$	1,7	II
Чёрные дыры	разные	разные	разные	1	1	1	III

\* Бетельгейзе. <sup>†</sup> Ригель. <sup>‡</sup> Сириус В. <sup>§</sup> Радио-пульсар J1903+0327.

Таблица 1.1: Классификация звёзд согласно общей теории относительности. Данная классификация представлена численными значениями параметров звёзд, рассчитанных нами для типичных звёзд разных классов.

екта совпадают с его физической поверхностью ( $r_g = r_{br} = a$ ). Это — гравитационные коллапсары (чёрные дыры): на физической поверхности такого объекта возникает состояние гравитационного коллапса ( $g_{00} = 0$ ), поэтому вся его масса сосредоточена внутри поверхности коллапса. Чёрные дыры будут в центре внимания в главе 4 книги.

Эта классификация представлена в таблице 1.1 значениями параметров, рассчитанных для типичных звёзд известных классов.

Эта модель жидких звёзд, построенная на основе общей теории относительности и рассмотренная в новой классификации звёзд, будет предметом развития в следующих главах.

### 1.3 Физические наблюдаемые величины

Прежде чем рассматривать звёзды методами общей теории относительности, необходимо изложить основы математического аппарата физически наблюдаемых величин в четырёхмерном псевдоримановом пространстве (пространстве-времени). Подробное описание теории физически наблюдаемых величин уже дано в соответствующих главах наших книг [18, 19]. Здесь мы приведём лишь основы этой теории, необходимые для данного исследования\*.

Чтобы построить описательную картину любой физической теории, нам необходимо выразить полученные результаты через реальные физические величины, которые можно измерить в эксперименте. Это — *физически наблюдаемые величины*. В общей теории относительности эта проблема вовсе не тривиальна, потому что мы рассматриваем объекты в четырёхмерном пространстве (пространстве-времени), и поэтому мы должны определить, какие компоненты соответствующих четырёхмерных тензорных величин действительно физически наблюдаемы.

Вот вкратце эта проблема. Все уравнения общей теории относительности приводятся в *общековариантной форме*, которая не

---

\*Наиболее полное на сегодняшний день описание (компендиум) математического аппарата физически наблюдаемых величин в общей теории относительности дано в нашей недавней статье. В этой статье мы собрали всё (или почти всё), что мы знаем на эту тему от Зельманова и что было получено за прошедшие десятилетия: Rabounski D. and Borissova L. Physical observables in General Relativity and the Zelmanov chronometric invariants. *Progress in Physics*, 2023, vol. 19, no. 1, 3–29.

зависит от выбора нами системы отсчёта. Уравнения, как и содержащиеся в них переменные, четырёхмерны. Таким образом, мы задаёмся вопросом, какие из компонент этих четырёхмерных величин действительно наблюдаемы в реальных физических экспериментах, т.е. какие их компоненты являются реально физически наблюдаемыми величинами? Интуитивно мы могли бы, на первый взгляд, легко предположить, что трёхмерные компоненты четырёхмерного тензора составляют физически наблюдаемую величину. Но в то же время мы не можем быть абсолютно уверены, что то, что мы наблюдаем, является просто трёхмерными компонентами четырёхмерных величин, а не более сложными переменными, которые зависят от других факторов, например, от свойств физических эталонов пространства отсчёта.

Как известно, четырёхмерный вектор (тензор 1-го ранга) имеет всего 4 компоненты: 1 временную и 3 пространственные. Тензор 2-го ранга, например, тензор вращения или тензор деформации, имеет 16 компонент: 1 временную, 9 пространственных и 6 смешанных (пространственно-временных) компонент. Тогда, действительно ли смешанные компоненты являются физически наблюдаемыми величинами? Тензоры более высоких рангов имеют ещё больше компонент; например, тензор кривизны Римана-Кристоффеля имеет 256 компонент, поэтому проблема эвристического распознавания истинно физически наблюдаемых компонент становится намного сложнее. Кроме того, имеется препятствие, связанное с распознаванием наблюдаемых компонент ковариантных тензоров (у которых индексы занимают нижнее положение) и тензоров смешанного типа, имеющих как нижний, так и верхний индексы.

Мы видим, что распознавание физически наблюдаемых величин в общей теории относительности не является тривиальной задачей. В идеале мы хотели бы иметь математический метод для *однозначного* вычисления физически наблюдаемых величин для любых тензоров любого заданного ранга.

Многочисленные попытки разработать такой математический метод предпринимались в 1930-х годах некоторыми исследователями того времени. Некоторый вклад был сделан Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшицем в их знаменитой *Теории поля* [20], впервые опубликованной в 1939 г. Помимо обсуждения самой проблемы физически наблюдаемых величин, в §84 своей книги они ввели интер-

вал физически наблюдаемого времени наряду с физически наблюдаемым трёхмерным интервалом, которые зависят от физических свойств (физических эталонов) пространства отсчёта наблюдателя. Но все подобные попытки, предпринятые в 1930-х гг., ограничивались лишь решением некоторых частных задач. Ни одна из этих попыток не привела к полноценному математическому аппарату для вычисления физически наблюдаемых величин.

Полноценный математический аппарат для вычисления физически наблюдаемых величин в четырёхмерном псевдоримановом пространстве был впервые введён Абрамом Леонидовичем Зельмановым и известен как *теория хронометрических инвариантов*, или *хронометрически инвариантный формализм*. Впервые этот математический аппарат был представлен в 1944 году в кандидатской диссертации Зельманова [21], затем — в его кратких статьях 1956–1957 гг. [22, 23].

Суть зельмановского математического аппарата физически наблюдаемых величин (хронометрических инвариантов), разработанного специально для четырёхмерного искривлённого и неоднородного псевдориманова пространства (пространства-времени), заключается в следующем.

В любой точке пространства-времени мы можем провести трёхмерное пространственное сечение  $x^0 = ct = const$  (трёхмерное пространство), ортогональное заданной линии времени  $x^i = const$ . Если пространственное сечение всюду ортогонально линиям времени, пронизывающим его в каждой точке, такое пространство называется *голономным*. В противном случае, если пространственное сечение неортогонально вышеупомянутым линиям времени, пространство называется *неголономным*.

Система отсчёта реального наблюдателя включает в себя координатную сетку, натянутую на реальное физическое тело (тело отсчёта наблюдателя, находящееся рядом с ним) и реальные часы, расположенные в каждой точке этой координатной сети. И координатная сетка, и часы представляют собой набор реальных эталонов, с которыми наблюдатель сравнивает результаты своих измерений. Поэтому регистрируемые наблюдателем физически наблюдаемые величины должны быть результатом проецирования четырёхмерных величин на линию времени и на пространственное сечение, связанные с ним.

Оператор проецирования на линию времени наблюдателя представляет собой мировой вектор четырёхмерной скорости

$$b^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \quad (1.18)$$

его тела отсчёта по отношению к нему. Этот мировой вектор касателен к мировой линии наблюдателя в каждой её точке, поэтому это — вектор единичной длины

$$b_\alpha b^\alpha = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}{ds^2} = +1. \quad (1.19)$$

Оператор проецирования на пространственное сечение наблюдателя (его локальное трёхмерное пространство) определяется как четырёхмерный симметричный тензор  $h_{\alpha\beta}$ , имеющий вид

$$\left. \begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= -g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta \\ h^{\alpha\beta} &= -g^{\alpha\beta} + b^\alpha b^\beta \\ h_\alpha^\beta &= -g_\alpha^\beta + b_\alpha b^\beta \end{aligned} \right\}. \quad (1.20)$$

Мировой вектор  $b^\alpha$  и тензор  $h_{\alpha\beta}$  ортогональны друг другу. Математически это означает, что их совместная свёртка равна нулю:  $h_{\alpha\beta} b^\alpha = 0$ ,  $h^{\alpha\beta} b_\alpha = 0$ ,  $h_\alpha^\beta b_\alpha = 0$ ,  $h_\alpha^\beta b^\alpha = 0$ . Таким образом, основные свойства операторов проецирования на линию времени и пространственное сечение наблюдателя выражаются в виде

$$b_\alpha b^\alpha = +1, \quad h_\alpha^\beta b^\alpha = 0. \quad (1.21)$$

Если наблюдатель покоится относительно своего тела отсчёта, его система отсчёта называется *сопутствующей системой отсчёта*. В этом случае  $b^i = 0$  в его системе отсчёта, а координатные сетки его пространственного сечения связаны преобразованиями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}^0 &= \tilde{x}^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \\ \tilde{x}^i &= \tilde{x}^i(x^1, x^2, x^3), \quad \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^0} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (1.22)$$

где третье уравнение отображает тот факт, что пространственные координаты в тильдованной сетке не зависят от времени нетильдованной сетки, что эквивалентно координатной сетке, где линии

времени фиксированы ( $x^i = const$ ) в каждой точке. Преобразование пространственных координат есть не что иное, как переход от одной координатной сетки к другой в пределах одного и того же пространственного сечения. Преобразование времени означает смену всего набора часов, т.е. это — переход в другое пространственное сечение (другое трёхмерное пространство отсчёта). На практике это означает замену одного тела отсчёта со всеми его физическими эталонами другим телом отсчёта, имеющим свои собственные физические эталоны. Но при использовании разных эталонов наблюдатель получит разные результаты (другие наблюдаемые величины). Следовательно, физически наблюдаемые проекции в сопутствующей системе отсчёта должны быть инвариантны относительно преобразования времени, что влечёт за собой инвариантность относительно преобразований (1.22). Другими словами, такие величины должны обладать свойством *хронометрической инвариантности*.

Поэтому мы называем физически наблюдаемые величины в сопутствующей системе отсчёта *хронометрически инвариантными величинами* или, короче, *хронометрическими инвариантами*.

Тензор проецирования  $h_{\alpha\beta}$ , рассматриваемый в пространстве отсчёта, сопутствующем наблюдателю, обладает всеми свойствами фундаментального метрического тензора, а именно

$$h_i^\alpha h_\alpha^k = \delta_i^k - b_i b^k = \delta_i^k, \quad \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где  $\delta_i^k$  — единичный трёхмерный тензор\*. Следовательно, в сопутствующей системе отсчёта, используя трёхмерный тензор  $h_{ik}$  мы можем поднимать или опускать индексы в хронометрически инвариантных величинах.

Таким образом, в сопутствующей системе отсчёта основными свойствами операторов проецирования являются

$$b_\alpha b^\alpha = +1, \quad h_\alpha^i b^\alpha = 0, \quad h_i^\alpha h_\alpha^k = \delta_i^k. \quad (1.24)$$

Вычислим компоненты операторов проецирования в сопутствующей системе отсчёта. Компонента  $b^0$  получается из очевидно-

---

\*Тензор  $\delta_i^k$  есть трёхмерная часть четырёхмерного единичного тензора  $\delta_\beta^\alpha$ , который можно использовать для замены индексов в четырёхмерных величинах.

го условия  $b_\alpha b^\alpha = g_{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta = 1$ , которое в сопутствующей системе отсчёта ( $b^i = 0$ ) имеет вид:  $b_\alpha b^\alpha = g_{00} b^0 b^0 = 1$ . Эта компонента и остальные компоненты  $b^\alpha$  равны

$$\left. \begin{aligned} b^0 &= \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, & b^i &= 0 \\ b_0 &= g_{0\alpha} b^\alpha = \sqrt{g_{00}}, & b_i &= g_{i\alpha} b^\alpha = \frac{g_{i0}}{\sqrt{g_{00}}} \end{aligned} \right\}, \quad (1.25)$$

используя которые мы вычисляем компоненты оператора проецирования на пространство  $h_{\alpha\beta}$ . В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} h_{00} &= 0, & h^{00} &= -g^{00} + \frac{1}{g_{00}}, & h_0^0 &= 0 \\ h_{0i} &= 0, & h^{0i} &= -g^{0i}, & h_i^0 &= \delta_i^0 = 0 \\ h_{i0} &= 0, & h^{i0} &= -g^{i0}, & h_i^0 &= \frac{g_{i0}}{g_{00}} \\ h_{ik} &= -g_{ik} + \frac{g_{0i} g_{0k}}{g_{00}}, & h^{ik} &= -g^{ik}, & h_k^i &= -g_k^i = \delta_k^i \end{aligned} \right\}. \quad (1.26)$$

Зельманов создал математический метод для вычисления хронометрически инвариантных (физически наблюдаемых) проекций любой общековариантной (четырёхмерной) тензорной величины. Он сформулировал этот метод в виде теоремы, которую мы называем *теоремой Зельманова*:

### Теорема Зельманова

Пусть есть четырёхмерный тензор  $Q_{\alpha\beta\dots\sigma}^{\mu\nu\dots\rho}$  ранга  $r$ , где  $Q_{00\dots 0}^{ik\dots p}$  представляет собой трёхмерную часть тензора  $Q_{00\dots 0}^{\mu\nu\dots\rho}$ , у которого все верхние индексы не равны нулю, а все  $m$  нижних индексов равны нулю. Тогда

$$T^{ik\dots p} = (g_{00})^{-\frac{m}{2}} Q_{00\dots 0}^{ik\dots p} \quad (1.27)$$

представляет собой хронометрически инвариантный трёхмерный контравариантный тензор  $(r - m)$ -го ранга. Это означает, что х.и.-тензор  $T^{ik\dots p}$  является результатом  $m$ -кратного проецирования исходного тензора  $Q_{\alpha\beta\dots\sigma}^{\mu\nu\dots\rho}$  на линию времени по индексам  $\alpha, \beta \dots \sigma$  и на пространственное сечение — по  $r - m$  индексам  $\mu, \nu \dots \rho$ .

Согласно этой теореме, хронометрически инвариантные (физически наблюдаемые) проекции любого произвольного четырёхмерного вектора  $Q^\alpha$  вычисляются следующим образом

$$b^\alpha Q_\alpha = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h^i_\alpha Q^\alpha = Q^i, \quad (1.28)$$

а х.и.-проекциями любого произвольного симметричного тензора 2-го ранга  $Q^{\alpha\beta}$  являются следующие величины

$$b^\alpha b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q_{00}}{g_{00}}, \quad h^{i\alpha} b^\beta Q_{\alpha\beta} = \frac{Q^i_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad h^i_\alpha h^k_\beta Q^{\alpha\beta} = Q^{ik}. \quad (1.29)$$

Так х.и.-проекциями четырёхмерного координатного интервала  $dx^\alpha$  являются интервал физически наблюдаемого времени

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i \quad (1.30)$$

и интервал наблюдаемых координат  $dx^i$ , совпадающих с пространственными координатами.

Соответственно, физически наблюдаемая скорость частицы представляет собой трёхмерный х.и.-вектор

$$v^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad v_i v^i = h_{ik} v^i v^k = v^2, \quad (1.31)$$

который на изотропных траекториях становится трёхмерным х.и.-вектором физически наблюдаемой скорости света

$$c^i = v^i = \frac{dx^i}{d\tau}, \quad c_i c^i = h_{ik} c^i c^k = c^2. \quad (1.32)$$

Проецируя ковариантный и контравариантный фундаментальный метрический тензор на пространственное сечение в сопутствующей системе отсчёта ( $b^i = 0$ )

$$\left. \begin{aligned} h^\alpha_i h^\beta_k g_{\alpha\beta} &= g_{ik} - b_i b_k = -h_{ik} \\ h^i_\alpha h^k_\beta g^{\alpha\beta} &= g^{ik} - b^i b^k = g^{ik} = -h^{ik} \end{aligned} \right\}, \quad (1.33)$$

получаем, что х.и.-величина

$$h_{ik} = -g_{ik} + b_i b_k \quad (1.34)$$

представляет собой физически наблюдаемый *х.и.-метрический тензор*, который может поднимать и опускать индексы у любого трёхмерного х.и.-объекта в сопутствующей системе отсчёта. Его контравариантная и смешанная компоненты равны

$$h^{ik} = -g^{ik}, \quad h_k^i = -g_k^i = \delta_k^i. \quad (1.35)$$

Выражая  $g_{\alpha\beta}$  через определение  $h_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + b_\alpha b_\beta$ , мы получаем формулу для четырёхмерного интервала

$$ds^2 = b_\alpha b_\beta dx^\alpha dx^\beta - h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (1.36)$$

выраженного через операторы проецирования  $b_\alpha$  и  $h_{\alpha\beta}$ . В этой формуле  $b_\alpha dx^\alpha = c d\tau$ , поэтому первый член равен  $b_\alpha b_\beta dx^\alpha dx^\beta = c^2 d\tau^2$ . Второй член  $h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\sigma^2$  в сопутствующей системе отсчёта есть квадрат наблюдаемого трёхмерного интервала\*

$$d\sigma^2 = h_{ik} dx^i dx^k. \quad (1.37)$$

Таким образом, четырёхмерный интервал, выраженный через физически наблюдаемые величины, равен

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - d\sigma^2. \quad (1.38)$$

Основные физически наблюдаемые свойства сопутствующего пространства отсчёта, ассоциированного с наблюдателем, также были выведены Зельмановым в рамках этой теории, в частности — исходя из свойства некоммутативности (отличия от нуля разности) смешанных вторых х.и.-производных по координатам

$$\frac{{}^* \partial^2}{\partial x^i \partial t} - \frac{{}^* \partial^2}{\partial t \partial x^i} = \frac{1}{c^2} F_i \frac{{}^* \partial}{\partial t}, \quad (1.39)$$

$$\frac{{}^* \partial^2}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{{}^* \partial^2}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{2}{c^2} A_{ik} \frac{{}^* \partial}{\partial t}, \quad (1.40)$$

где х.и.-операторы дифференцирования, которые также ввёл Зельманов, имеют следующий вид

$$\frac{{}^* \partial}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \frac{{}^* \partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{0i}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0}. \quad (1.41)$$

---

\*Это связано с тем, что  $h_{\alpha\beta}$  в сопутствующей системе отсчёта обладает всеми свойствами фундаментального метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ .

Первые два физически наблюдаемых свойства пространства отсчёта наблюдателя характеризуются х.и.-вектором гравитационно-инерциальной силы  $F_i$  и антисимметричным х.и.-тензором угловых скоростей вращения пространства отсчёта  $A_{ik}$

$$F_i = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \left( \frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right), \quad (1.42)$$

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_k - F_k v_i), \quad (1.43)$$

где величины  $w$  и  $v_i$  характеризуют тело отсчёта и пространство отсчёта. Это — гравитационный потенциал

$$w = c^2 (1 - \sqrt{g_{00}}), \quad 1 - \frac{w}{c^2} = \sqrt{g_{00}} \quad (1.44)$$

и линейная скорость вращения пространства

$$\left. \begin{aligned} v_i &= -c \frac{g_{0i}}{\sqrt{g_{00}}}, & v^i &= -c g^{0i} \sqrt{g_{00}} \\ v_i &= h_{ik} v^k, & v^2 &= v_k v^k = h_{ik} v^i v^k \end{aligned} \right\}. \quad (1.45)$$

Заметим, что  $w$  и  $v_i$  не обладают свойством хронометрической инвариантности, несмотря на то, что  $v_i = h_{ik} v^k$  может быть получено как для х.и.-величины, путём опускания индекса с помощью х.и.-метрический тензора  $h_{ik}$ .

Зельманов также обнаружил, что х.и.-величины  $F_i$  и  $A_{ik}$  связаны друг с другом двумя тождествами (мы называем их *тождествами Зельманова*)

$$\frac{* \partial A_{ik}}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{* \partial F_k}{\partial x^i} - \frac{* \partial F_i}{\partial x^k} \right) = 0, \quad (1.46)$$

$$\frac{* \partial A_{km}}{\partial x^i} + \frac{* \partial A_{mi}}{\partial x^k} + \frac{* \partial A_{ik}}{\partial x^m} + \frac{1}{2} (F_i A_{km} + F_k A_{mi} + F_m A_{ik}) = 0. \quad (1.47)$$

В рамках квазиньютоновского приближения, т.е. в слабом гравитационном поле при скоростях много меньших скорости света и при отсутствии вращения пространства,  $F_i$  (1.42) становится обычной нерелятивистской гравитационной силой  $F_i = \frac{\partial w}{\partial x^i}$ .

Зельманов также доказал следующую теорему, устанавливающую условие голономности пространства:

**Теорема Зельманова о голономности пространства**

Тождественное равенство нулю тензора  $A_{ik}$  нулю в четырёхмерной области пространства (пространства-времени) является необходимым и достаточным условием того, чтобы пространственные сечения были всюду ортогональны линиям времени в этой области.

Иными словами, необходимое и достаточное условие голономности пространства достигается приравнением к нулю тензора  $A_{ik}$ . Естественно, если пространственные сечения всюду ортогональны линиям времени (в таком случае пространство голономно), то величины  $g_{0i}$  равны нулю. Поскольку  $g_{0i} = 0$ , мы имеем  $v_i = 0$  и  $A_{ik} = 0$ . Поэтому тензор  $A_{ik}$  мы также будем называть *тензором неголономности пространства*.

Если условия  $F_i = 0$  и  $A_{ik} = 0$  выполняются совместно где-то в пространстве, то условия  $g_{00} = 1$  и  $g_{0i} = 0$  также там верны. В такой области, согласно (1.30),  $d\tau = dt$ : разница между координатным временем  $t$  и физически наблюдаемым временем  $\tau$  исчезает при отсутствии гравитационных полей и вращения пространства. Иными словами, согласно теории хронометрических инвариантов, разница между координатным временем  $t$  и физически наблюдаемым временем  $\tau$  возникает как из-за гравитации, так и вращения пространства отсчёта наблюдателя (локального пространства Земли, в случае наземного наблюдателя), либо из-за каждого из этих физических факторов в отдельности.

С другой стороны, нереально найти такую область Вселенной, где отсутствовали бы гравитационные поля и вращение пространства. Поэтому на практике физически наблюдаемое время  $\tau$  и координатное время  $t$  отличаются друг от друга. Это означает, что реальное пространство нашей Вселенной неголономно, тогда как голономное пространство может быть лишь его локальным приближением.

Условие голономности пространства (пространства-времени) напрямую связано с проблемой интегрируемости времени в нём. Формула для интервала физически наблюдаемого времени (1.30) не имеет интегрирующего множителя. Другими словами, эта формула не может быть приведена к виду

$$d\tau = A dt, \quad (1.48)$$

где множитель  $A$  зависит только от  $t$  и  $x^i$ : в неголономном пространстве формула (1.30) имеет ненулевой второй член, зависящий от интервала координат  $dx^i$  и от  $g_{0i}$ . В голономном пространстве  $A_{ik} = 0$ , поэтому  $g_{0i} = 0$ . В таком случае второй член (1.30) равен нулю, а первый член представляет собой элементарный интервал времени  $dt$  с интегрирующим множителем

$$A = \sqrt{g_{00}} = f(x^0, x^i), \quad (1.49)$$

поэтому мы можем написать интеграл

$$d\tau = \int \sqrt{g_{00}} dt. \quad (1.50)$$

Следовательно, время глобально интегрируемо в голономном пространстве ( $A_{ik} = 0$ ), а в неголономном пространстве ( $A_{ik} \neq 0$ ) время не может быть глобально интегрируемо. В случае, когда время интегрируемо (голономное пространство), мы можем синхронизировать часы в двух удалённых точках пространства, перемещая контрольные часы по пути между этими двумя точками. В случае, когда время не может быть глобально интегрировано (неголономное пространство), синхронизация часов в двух удалённых точках невозможна: чем больше расстояние между этими двумя точками, тем больше расхождение времени на этих часах.

Пространство нашей планеты Земля неголономно из-за его суточного вращения вокруг земной оси. Следовательно, двое часов, расположенных в разных точках земной поверхности, должны показывать расхождение между интервалами времени, регистрируемыми на них. Чем больше расстояние между этими часами, тем больше расхождение физически наблюдаемого времени регистрируемого ими. Этот эффект был достоверно подтверждён экспериментом Хафеле-Китинга [24–29] по перемещению стандартных атомных часов на самолёте вокруг земного шара. В этом эксперименте вращение земного пространства существенно изменило измеряемое время. При полете по вращению Земли пространство наблюдателя на борту самолёта имело большее вращение, чем пространство наблюдателя, который оставался неподвижным на земле. Во время полёта против вращения Земли было наоборот. В результате атомные часы на борту самолёта показывали значительное откло-

нение наблюдаемого времени в зависимости от скорости вращения пространства.

Поскольку синхронизация часов в различных точках на поверхности Земли является важнейшей задачей морской навигации, а также авиации, поправки на десинхронизацию в давние времена вводились в виде таблиц эмпирически полученных поправок, учитывающих вращение Земли. Теперь, благодаря теории хронометрических инвариантов, мы знаем происхождение этих поправок и можем вычислить их на основе общей теории относительности.

Помимо гравитации и вращения, эталонное тело может деформироваться, меняя со временем свои координатные сетки. Этот фактор также следует учитывать при измерениях. Это можно сделать, выделив в уравнениях трёхмерный симметричный х.и.-тензор скорости деформации пространства отсчёта

$$\left. \begin{aligned} D_{ik} &= \frac{1}{2} \frac{* \partial h_{ik}}{\partial t} \\ D^{ik} &= -\frac{1}{2} \frac{* \partial h^{ik}}{\partial t} \\ D &= h^{ik} D_{ik} = \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial t}, \quad h = \det \|h_{ik}\| \end{aligned} \right\}. \quad (1.51)$$

Символы Кристоффеля характеризуют свойство *неоднородности пространства*. Обыкновенные символы Кристоффеля 2-го ранга  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  и 1-го ранга  $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = g^{\alpha\sigma} \Gamma_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left( \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\sigma}} \right) \quad (1.52)$$

связаны с соответствующими х.и.-символами Кристоффеля

$$\Delta_{jk}^i = h^{im} \Delta_{jk,m} = \frac{1}{2} h^{im} \left( \frac{* \partial h_{jm}}{\partial x^k} + \frac{* \partial h_{km}}{\partial x^j} - \frac{* \partial h_{jk}}{\partial x^m} \right), \quad (1.53)$$

которые определяются аналогично  $\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha}$  и  $\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$ . Единственное отличие состоит в том, что здесь вместо фундаментального метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$  используется х.и.-метрический тензор  $h_{ik}$ .

Компоненты символов Кристоффеля могут быть выражены через х.и.-свойства пространства отсчёта наблюдателя. Выражая компоненты  $g^{\alpha\beta}$  и первые производные от  $g_{\alpha\beta}$  через  $F_i$ ,  $A_{ik}$ ,  $D_{ik}$ ,  $w$  и  $v_i$ ,

после некоторых вычислений получаем

$$\Gamma_{00,0} = -\frac{1}{c^3} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.54)$$

$$\Gamma_{00,i} = \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 F_i + \frac{1}{c^4} v_i \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.55)$$

$$\Gamma_{0i,0} = -\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \frac{\partial w}{\partial x^i}, \quad (1.56)$$

$$\Gamma_{0i,j} = -\frac{1}{c} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left(D_{ij} + A_{ij} + \frac{1}{c^2} F_j v_i\right) + \frac{1}{c^3} v_j \frac{\partial w}{\partial x^i}, \quad (1.57)$$

$$\Gamma_{ij,0} = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left[D_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_j + F_j v_i)\right], \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij,k} = & -\Delta_{ij,k} + \frac{1}{c^2} \left[ v_i A_{jk} + v_j A_{ik} + \frac{1}{2} v_k \left(\frac{\partial v_j}{\partial x^i} + \frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2c^2} v_k (F_i v_j + F_j v_i) \right] + \frac{1}{c^4} F_k v_i v_j, \quad (1.59) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{c^3} \left[ \frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial w}{\partial t} + \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) v_k F^k \right], \quad (1.60)$$

$$\Gamma_{00}^k = -\frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 F^k, \quad (1.61)$$

$$\Gamma_{0i}^0 = \frac{1}{c^2} \left[ -\frac{1}{1 - \frac{w}{c^2}} \frac{\partial w}{\partial x^i} + v_k \left(D_i^k + A_i^k + \frac{1}{c^2} v_i F^k\right) \right], \quad (1.62)$$

$$\Gamma_{0i}^k = \frac{1}{c} \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) \left(D_i^k + A_i^k + \frac{1}{c^2} v_i F^k\right), \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 = & -\frac{1}{c \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)} \left\{ -D_{ij} + \frac{1}{c^2} v_n \times \right. \\ & \times \left[ v_j (D_i^n + A_i^n) + v_i (D_j^n + A_j^n) + \frac{1}{c^2} v_i v_j F^n \right] + \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2c^2} (F_i v_j + F_j v_i) - \Delta_{ij}^n v_n \right\}, \quad (1.64) \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij}^k = \Delta_{ij}^k - \frac{1}{c^2} \left[ v_i (D_j^k + A_j^k) + v_j (D_i^k + A_i^k) + \frac{1}{c^2} v_i v_j F^k \right], \quad (1.65)$$

откуда мы имеем

$$D_k^i + A_k^i = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \left( \Gamma_{0k}^i - \frac{g_{0k} \Gamma_{00}^i}{g_{00}} \right), \quad (1.66)$$

$$F^k = - \frac{c^2 \Gamma_{00}^k}{g_{00}}, \quad (1.67)$$

$$g^{i\alpha} g^{k\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^m = h^{iq} h^{ks} \Delta_{qs}^m. \quad (1.68)$$

По аналогии с соответствующими абсолютными производными, Зельманов также ввёл х.и.-производные, в которых общековариантное дифференцирование и общековариантные символы Кристоффеля заменены на их х.и.-аналоги

$${}^* \nabla_i Q_k = \frac{{}^* \partial Q_k}{\partial x^i} - \Delta_{ik}^l Q_l, \quad (1.69)$$

$${}^* \nabla_i Q^k = \frac{{}^* \partial Q^k}{\partial x^i} + \Delta_{il}^k Q^l, \quad (1.70)$$

$${}^* \nabla_i Q_{jk} = \frac{{}^* \partial Q_{jk}}{\partial x^i} - \Delta_{ij}^l Q_{lk} - \Delta_{ik}^l Q_{jl}, \quad (1.71)$$

$${}^* \nabla_i Q_j^k = \frac{{}^* \partial Q_j^k}{\partial x^i} - \Delta_{ij}^l Q_l^k + \Delta_{il}^k Q_j^l, \quad (1.72)$$

$${}^* \nabla_i Q^{jk} = \frac{{}^* \partial Q^{jk}}{\partial x^i} + \Delta_{il}^j Q^{lk} + \Delta_{il}^k Q^{jl}, \quad (1.73)$$

$${}^* \nabla_i Q^i = \frac{{}^* \partial Q^i}{\partial x^i} + \Delta_{ji}^j Q^i, \quad \Delta_{ji}^j = \frac{{}^* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i}, \quad (1.74)$$

$${}^* \nabla_i Q^{ji} = \frac{{}^* \partial Q^{ji}}{\partial x^i} + \Delta_{il}^j Q^{il} + \Delta_{li}^j Q^{ji}, \quad \Delta_{li}^j = \frac{{}^* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^i}. \quad (1.75)$$

Зельманов также ввёл х.и.-тензор кривизны. Он следовал той же процедуре, по которой строился тензор Римана-Кристоффеля, исходя из некоммутативности вторых производных произвольного вектора  $Q^\alpha$ , взятых в данном пространстве, геометрия которого является римановой.

Зельманов взял за основу свойство некоммутативности вторых х.и.-производных произвольного вектора

$${}^* \nabla_i {}^* \nabla_k Q_l - {}^* \nabla_k {}^* \nabla_i Q_l = \frac{2A_{ik}}{c^2} \frac{{}^* \partial Q_l}{\partial t} + H_{lki}{}^{\dots j} Q_j, \quad (1.76)$$

где ковариантный х.и.-дифференциал вектора равен

$${}^* \nabla_k Q^i dx^k = dQ^i + \Delta_{kl}^i Q^k dx^l, \quad (1.77)$$

в результате чего он получил х.и.-тензор

$$H_{lki}{}^{\dots j} = \frac{{}^* \partial \Delta_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{{}^* \partial \Delta_{kl}^j}{\partial x^i} + \Delta_{il}^m \Delta_{km}^j - \Delta_{kl}^m \Delta_{im}^j, \quad (1.78)$$

который подобен тензору Схоутена из его теории неголономных многообразий [30]. Тензор  $H_{lki}{}^{\dots j}$  отличается от тензора Римана-Кристоффеля  $R_{\beta\gamma\delta}{}^{\alpha}$  наличием вращения пространства  $A_{ik}$  в формуле (1.76). Его обобщение даёт х.и.-тензор

$$C_{lkij} = \frac{1}{4} (H_{lkij} - H_{jkil} + H_{klji} - H_{iljk}), \quad (1.79)$$

обладающий всеми алгебраическими свойствами тензора Римана-Кристоффеля в трёхмерном пространстве (пространственном сечении) наблюдателя. Поэтому Зельманов назвал  $C_{lkij}$  *х.и.-тензором кривизны*, так как он фактически является тензором физически наблюдаемой кривизны трёхмерного пространственного сечения наблюдателя. Его последовательная свёртка шаг за шагом

$$C_{kj} = C_{kij}{}^{\dots i} = h^{im} C_{kimj}, \quad C = C_j^j = h^{lj} C_{lj} \quad (1.80)$$

даёт х.и.-скалярную кривизну  $C$ , которая является *наблюдаемой трёхмерной кривизной* этого пространства.

Тензор  $H_{lkij}$  в общем виде связан с тензором кривизны  $C_{lkij}$  следующим соотношением

$$H_{lkij} = C_{lkij} + \frac{1}{c^2} (2A_{ki} D_{jl} + A_{ij} D_{kl} + A_{jk} D_{il} + A_{kl} D_{ij} + A_{li} D_{jk}), \quad (1.81)$$

а свёрнутые тензоры  $H_{lk} = H_{lki}{}^{\dots i}$  и  $C_{lk} = C_{lki}{}^{\dots i}$  связаны как

$$H_{lk} = C_{lk} + \frac{1}{c^2} (A_{kj} D_l^j + A_{lj} D_k^j + A_{kl} D). \quad (1.82)$$

В частном случае, когда пространство не вращается,  $H_{lkij}$  и  $C_{lkij}$  совпадают. Это также верно для  $H_{lk}$  и  $C_{lk}$ . В этом частном случае тензор  $C_{lk} = h^{ij}C_{ilkj}$  имеет вид

$$C_{lk} = \frac{* \partial}{\partial x^k} \left( \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^l} \right) - \frac{* \partial \Delta_{kl}^i}{\partial x^i} + \Delta_{il}^m \Delta_{km}^i - \Delta_{kl}^m \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial x^m}. \quad (1.83)$$

Зельманов также вывел формулы х.и.-проекций тензора кривизны Римана-Кристоффеля.

Тензор кривизны Римана-Кристоффеля  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  является двух-парным симметричным тензором (это означает, что его парные индексы несимметричны внутри каждой пары, а пары симметричны друг относительно друга). Поэтому тензор Римана-Кристоффеля имеет три х.и.-проекции согласно формуле (1.29) хронометрически инвариантного формализма

$$X^{ik} = -c^2 \frac{R_{0 \cdot 0}^{\cdot i \cdot k}}{g_{00}}, \quad Y^{ijk} = -c \frac{R_{0 \dots}^{\cdot ijk}}{\sqrt{g_{00}}}, \quad Z^{ijkl} = c^2 R^{ijkl}. \quad (1.84)$$

Подставляя компоненты тензора Римана-Кристоффеля  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  в формулы его х.и.-проекций (1.84) и опуская индексы, Зельманов получил формулы

$$X_{ij} = \frac{* \partial D_{ij}}{\partial t} - (D_i^l + A_i^l)(D_{jl} + A_{jl}) + (* \nabla_i F_j + * \nabla_j F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_j, \quad (1.85)$$

$$Y_{ijk} = * \nabla_i (D_{jk} + A_{jk}) - * \nabla_j (D_{ik} + A_{ik}) + \frac{2}{c^2} A_{ij} F_k, \quad (1.86)$$

$$Z_{iklj} = D_{ik} D_{lj} - D_{il} D_{kj} + A_{ik} A_{lj} - A_{il} A_{kj} + 2 A_{ij} A_{kl} - c^2 C_{iklj}, \quad (1.87)$$

где  $Y_{(ijk)} = Y_{ijk} + Y_{jki} + Y_{kij} = 0$  как в тензоре Римана-Кристоффеля. Пошаговая свёртка наблюдаемой пространственной проекции  $Z_{iklj}$  как  $Z_{il} = h^{kj} Z_{iklj}$  и  $Z = h^{il} Z_{il}$  даёт

$$Z_{il} = D_{ik} D_l^k - D_{il} D + A_{ik} A_l^k + 2 A_{ik} A_l^k - c^2 C_{il}, \quad (1.88)$$

$$Z = h^{il} Z_{il} = D_{ik} D^{ik} - D^2 - A_{ik} A^{ik} - c^2 C. \quad (1.89)$$

В конце нашего обзора хронометрически инвариантного формализма рассмотрим уравнения поля Эйнштейна\*

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (1.90)$$

Уравнения поля, кроме фундаментального метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ , включают: тензор Риччи  $R_{\alpha\beta} = R^{\dots\sigma}_{\alpha\sigma\beta}$ . (симметричный тензор 2-го ранга — свёртка тензора кривизны Римана-Кристоффеля), риманову скалярную кривизну  $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ , гравитационную постоянную Эйнштейна  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 18,6 \times 10^{-28}$  см/грамм, гравитационную постоянную Гаусса  $G = 6,672 \times 10^{-8}$  см<sup>3</sup>грамм<sup>-1</sup>сек<sup>-2</sup>, тензор энергии-импульса  $T_{\alpha\beta}$  распределённой материи, заполняющей данное пространство, а также  $\lambda$ -член [см<sup>-2</sup>], характеризующий физический вакуум. См. §5.2 книги [18], где мы рассмотрели уравнения Эйнштейна и свойства физического вакуума в деталях.

Ландау и Лифшиц [20] используют  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$  вместо  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ , используемой Зельмановым. Чтобы понять причину, положим  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ , как в теории хронометрических инвариантов и в наших работах, и рассмотрим х.и.-проекции тензора энергии-импульса

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}, \quad J^i = \frac{c T^i_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad U^{ik} = c^2 T^{ik}, \quad (1.91)$$

которые вычисляются по формуле (1.29) как проекции любого симметричного тензора 2-го ранга. Они имеют следующий физический смысл:  $\rho$  есть наблюдаемая плотность массы,  $J^i$  есть наблюдаемая плотность импульса,  $U^{ik}$  есть наблюдаемый тензор напряжений. Тензор Риччи имеет размерность [см<sup>-2</sup>]. Поэтому скалярная х.и.-проекция уравнений поля  $\frac{G_{00}}{g_{00}} = -\frac{\kappa T_{00}}{g_{00}} + \lambda$  и величина  $\frac{\kappa T_{00}}{g_{00}} = \frac{8\pi G\rho}{c^2}$  имеют одну и ту же размерность [см<sup>-2</sup>]. Следовательно, тензор энергии-импульса  $T_{\alpha\beta}$  имеет ту же размерность, что и плотность массы [грамм/см<sup>3</sup>]. Следовательно, если бы мы подставили  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$ , то в правой части уравнений поля мы использовали бы не тензор энергии-импульса  $T_{\alpha\beta}$ , а величину  $c^2 T_{\alpha\beta}$ .

Х.и.-проекции уравнений Эйнштейна (1.90) вычисляются как проекции тензора 2-го ранга (1.29). Они имеют вид (мы называем

\* Левую часть уравнений поля (1.90) часто называют *тензором Эйнштейна*  $G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R$ , в обозначениях  $G_{\alpha\beta} = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}$ .

их х.и.-уравнениями Эйнштейна)

$$\begin{aligned} \frac{* \partial D}{\partial t} + D_{jl} D^{lj} + A_{jl} A^{lj} + \left( * \nabla_j - \frac{1}{c^2} F_j \right) F^j = \\ = -\frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 + U) + \lambda c^2, \end{aligned} \quad (1.92)$$

$$* \nabla_j (h^{ij} D - D^{ij} - A^{ij}) + \frac{2}{c^2} F_j A^{ij} = \varkappa J^i, \quad (1.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{* \partial D_{ik}}{\partial t} - (D_{ij} + A_{ij})(D_k^j + A_k^j) + D D_{ik} - D_{ij} D_k^j + \\ + 3 A_{ij} A_k^j + \frac{1}{2} (* \nabla_i F_k + * \nabla_k F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \\ = \frac{\varkappa}{2} (\rho c^2 h_{ik} + 2 U_{ik} - U h_{ik}) + \lambda c^2 h_{ik}, \end{aligned} \quad (1.94)$$

где  $U = h^{ik} U_{ik}$  след тензора напряжений  $U_{ik}$ .

Кроме того, тензор энергии-импульса  $T_{\alpha\beta}$  распределённой материи должен удовлетворять закону сохранения

$$\nabla_\sigma T^{\alpha\sigma} = 0. \quad (1.95)$$

Х.и.-проекции закона сохранения вычисляются как проекции тензора первого ранга (1.28). Мы называем их *х.и.-уравнениями закона сохранения*. Они имеют вид

$$\frac{* \partial \rho}{\partial t} + D \rho + \frac{1}{c^2} D_{ij} U^{ij} + * \widetilde{\nabla}_i J^i - \frac{1}{c^2} F_i J^i = 0, \quad (1.96)$$

$$\frac{* \partial J^k}{\partial t} + D J^k + 2 (D_i^k + A_i^k) J^i + * \widetilde{\nabla}_i U^{ik} - \rho F^k = 0, \quad (1.97)$$

где х.и.-оператор  $* \widetilde{\nabla}_i = * \nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$  построен на основе х.и.-оператора дифференцирования  $* \nabla_i$ .

Зная эти определения, мы можем найти, как устроен любой геометрический объект четырёхмерного псевдориманова пространства (пространства-времени общей теории относительности) с точки зрения любого наблюдателя, местонахождением которого является это пространство. Например, имея какое-либо уравнение, полученное в общековариантном тензорном анализе, мы можем вычислить его х.и.-проекции на линию времени и пространственное

сечение любой конкретной системы отсчёта, а затем выразить эти х.и.-проекции через физически наблюдаемые свойства этого пространства отсчёта. Таким образом, мы придём к полноценным уравнениям, содержащим только величины, измеримые на практике.

Итак, теперь у нас есть все математические “инструменты”, необходимые для дальнейшего построения математической теории внутреннего строения звёзд и источников звёздной энергии в соответствии с общей теорией относительности.

---

### 2.1 Введение метрики пространства жидкой звезды. Уравнения Эйнштейна, удовлетворяющие этой метрике

В этой главе мы представляем нашу математическую теорию жидких звёзд в применении к обычным звёздам. Это означает тип I по новой классификации, которую мы только что ввели согласно общей теории относительности (см. §1.2 и таблицу 1.1). Тип I охватывает широчайшее разнообразие звёзд, которое включает сверхгиганты, солнцеподобные звёзды (включая Солнце), обычные карлики и белые карлики\*.

Структура, вещество и поле жидкой звезды описываются метрикой Шварцшильда для сферы, заполненной несжимаемой жидкостью. Эта метрика была первоначально введена в 1916 году Карлом Шварцшильдом [14]. Он, однако, ввёл её в урезанном виде, содержащем существенные ограничения: он искусственно наложил эти ограничения при выводе, чтобы сделать поле непрерывным, без разрывов, что привело к искусственно урезанной геометрии данного метрического пространства. Другими словами, метрика, введенная Карлом Шварцшильдом, — не совсем настоящая метрика пространства жидкой сферы. Истинная метрика сферы, заполненной несжимаемой жидкостью, которая свободна от указанных ограничений и, таким образом, учитывает разрыв пространства, была выведена в 2009 г. Л. Борисовой [11, 12]. Сейчас мы повторим этот вывод в соответствии с её наиболее подробным объяснением [11], наряду с некоторыми последними поправками и комментариями.

---

\* В эддингтоновской теории газообразных звёзд белые карлики рассматриваются отдельно.

Рассмотрим пустое пространство, в котором находится сферический остров, представляющий собой жидкость. Структура, вещество и поле такого массивного острова должны характеризоваться метрикой пространства, обладающего сферической симметрией. Как известно, все сферически-симметричные метрики имеют следующий общий вид ( $e^{\nu}$  и  $e^{\lambda}$  суть функции от  $r$  и  $t$ )

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{\lambda} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.1)$$

Вещество и поле сферического жидкого острова должны удовлетворять уравнениям поля Эйнштейна (1.90), в которых в рассматриваемом случае мы пренебрегаем  $\lambda$ -полем, т.е.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta}, \quad (2.2)$$

где  $R_{\alpha\beta}$  тензор кривизны Риччи,  $R$  скалярная кривизна,  $T_{\alpha\beta}$  тензор энергии-импульса распределённой материи (жидкости), тогда как  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 18,6 \times 10^{-28}$  см/грамм гравитационная постоянная Эйнштейна. Заметим, что тензор энергии-импульса распределённой материи должен удовлетворять закону сохранения

$$\nabla_{\sigma} T^{\alpha\sigma} = 0, \quad (2.3)$$

где  $\nabla_{\sigma}$  символ общековариантного дифференцирования.

Уравнения поля Эйнштейна связывают компоненты фундаментального метрического тензора, кривизну пространства и распределённую материю в соответствии с римановой геометрией. Другими словами, инвариантная квадратичная форма римановой метрики  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = inv$  вместе с уравнениями Эйнштейна характеризуют римановы пространства (пространства с римановой геометрией). Применительно к общей теории относительности это означает следующее. Пусть у нас есть риманово пространство с метрикой  $ds^2$  и мы предполагаем, что в нём распределена материя (тем самым мы предполагаем конкретную формулу для тензора энергии-импульса  $T_{\alpha\beta}$ ). Тогда компоненты фундаментального метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ , известные из формулы метрики  $ds^2$ , и компоненты конкретного тензора энергии-импульса, будучи подставленными в, соответственно, левую и правую части уравнений Эйнштейна должны преобразовать эти уравнения в тождества.

Вот как на основе общих формул сферически-симметричной метрики (2.1) можно вывести метрику сферы, заполненной идеальной жидкостью. Во-первых, мы возьмём тензор энергии-импульса идеальной жидкости и подставим его компоненты в правую часть уравнений поля. Затем мы находим компоненты фундаментального метрического тензора из формулы сферически-симметричной метрики (2.1) в их общем виде, содержащем коэффициенты  $e^\nu$  и  $e^\lambda$ . Подставим эти компоненты в левую часть уравнений поля. Затем мы посмотрим, какой вид коэффициентов  $e^\nu$  и  $e^\lambda$  делает левую часть уравнений поля такой же, как и правая (тем самым превращая уравнения поля в тождества). Наконец, подставляем полученные частные формулы для коэффициентов  $e^\nu$  и  $e^\lambda$  обратно в общую формулу сферически-симметричной метрики. В результате мы получаем истинную метрику сферы, заполненной идеальной жидкостью. Voilà!

С таким же успехом можно было бы спросить, почему сам Шварцшильд не поступил именно так? Вместо этого, почему он пошёл другим сложным путём, полным предположений? На этот вопрос нет ответа. . . Вернёмся к нашей дедукции.

Как известно, тензор энергии-импульса идеальной жидкости (несжимаемой и невязкой) имеет вид

$$T^{\alpha\beta} = \left(\rho_0 + \frac{p}{c^2}\right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta}, \quad (2.4)$$

где  $\rho = \rho_0 = const$  плотность жидкости (она является постоянной),  $p$  давление в жидкости, а величина

$$U^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}, \quad U_\alpha U^\alpha = 1 \quad (2.5)$$

обозначает четырёхмерную скорость потока жидкости относительно наблюдателя (его пространство отсчёта совпадает с пространством жидкой сферы, в центре которой — начало координат).

Теперь запишем уравнения поля в покомпонентном виде с учётом физически наблюдаемых свойств пространства, связанного с жидкой сферой.

Компоненты  $g_{\alpha\beta}$  имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= e^\nu, & g_{0i} &= 0 \\ g_{11} &= -e^\lambda, & g_{22} &= -r^2, & g_{33} &= -r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

в метрике сферически-симметричных пространств (2.1). Согласно хронометрически инвариантному формализму (см. §1.3), гравитационный потенциал в таком пространстве имеет вид

$$w = c^2 \left(1 - e^{\frac{\nu}{2}}\right). \quad (2.7)$$

Так как  $g_{0i} = 0$  в этой метрике, то пространство этой метрики не вращается, т.е. линейная скорость его вращения равна нулю:  $v_i = 0$ . Следовательно, х.и.-тензор угловой скорости вращения пространства с этой метрикой равен нулю

$$A_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_k}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right) + \frac{1}{2c^2} (F_i v_k - F_k v_i) = 0, \quad (2.8)$$

а х.и.-вектор гравитационно-инерциальной силы имеет вид

$$F_i = \frac{c^2}{c^2 - w} \left( \frac{\partial w}{\partial x^i} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = -\frac{c^2}{2} \nu', \quad (2.9)$$

где штрих обозначает дифференцирование по радиальной координате  $r$ . При этом х.и.-метрический тензор  $h_{ik}$  пространства имеет следующие ненулевые компоненты

$$h_{11} = e^\lambda, \quad h_{22} = r^2, \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.10)$$

$$h^{11} = e^{-\lambda}, \quad h^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad h^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.11)$$

$$h = \det \|h_{ik}\| = e^\lambda r^4 \sin^2 \theta. \quad (2.12)$$

Так как х.и.-тензор скорости деформации пространства  $D_{ik}$  определяется через х.и.-производные от  $h_{ik}$ , он имеет только следующие ненулевые компоненты

$$D_{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{\lambda - \frac{\nu}{2}}, \quad D^{11} = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-\lambda - \frac{\nu}{2}}, \quad D = \frac{\dot{\lambda}}{2} e^{-\frac{\nu}{2}}, \quad (2.13)$$

где верхняя точка обозначает дифференцирование по временной координате  $t$ .

Х.и.-символы Кристоффеля (они характеризуют физически наблюдаемую неоднородность пространства) вычисляются по их определению, данному в §1.3, через компоненты х.и.-метрического

тензора  $h_{ik}$ . После некоторых вычислений получаем

$$\Delta_{11,1} = \frac{\lambda'}{2} e^\lambda, \quad \Delta_{22,1} = -r, \quad \Delta_{33,1} = -r \sin^2 \theta, \quad (2.14)$$

$$\Delta_{12,2} = r, \quad \Delta_{33,2} = -r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2.15)$$

$$\Delta_{13,3} = r \sin^2 \theta, \quad \Delta_{23,3} = r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (2.16)$$

$$\Delta_{11}^1 = \frac{\lambda'}{2}, \quad \Delta_{22}^1 = -r e^{-\lambda}, \quad \Delta_{33}^1 = -r \sin^2 \theta e^{-\lambda}, \quad (2.17)$$

$$\Delta_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad (2.18)$$

$$\Delta_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta. \quad (2.19)$$

В пространстве без вращения х.и.-тензор кривизны 2-го ранга  $C_{lk} = h^{ij} C_{ilkj}$  имеет вид (1.83). После некоторых вычислений мы получаем ненулевые компоненты  $C_{lk}$  для сферически-симметричной метрики без вращения (2.1). Они имеют вид

$$C_{11} = -\frac{\lambda'}{r}, \quad C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2 \theta} = e^{-\lambda} \left( 1 - \frac{r\lambda'}{2} \right) - 1. \quad (2.20)$$

Вычислим х.и.-проекции тензора энергии-импульса идеальной жидкости (2.4) по общим формулам (1.91). Это — наблюдаемая плотность массы  $\rho$ , наблюдаемая плотность импульса  $J^i$  и наблюдаемый тензор напряжений  $U^{ik}$  жидкости. Подставляя  $b^i = 0$  и  $b^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}$  (1.25), характеризующие сопутствующую систему отсчёта (в данном случае наблюдатель сопутствует жидкой сфере), получаем

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho_0, \quad J^i = \frac{cT_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad U^{ik} = c^2 T^{ik} = p h^{ik}, \quad (2.21)$$

откуда также имеем для  $U = h^{ik} U_{ik}$

$$U = 3p. \quad (2.22)$$

Первая х.и.-компонента означает, что плотность  $\rho$  жидкой среды постоянна всюду внутри сферы. Полученное условие  $J^i = 0$  означает, что жидкость не течёт, тогда как  $U^{ik} = p h^{ik}$  означает, что пространство отсчёта наблюдателя сопутствует жидкой среде.

Теперь х.и.-уравнения Эйнштейна (1.92–1.94) в пространстве без вращения принимают упрощённую форму

$${}^* \frac{\partial D}{\partial t} + D_{jl} D^{lj} + \left( {}^* \nabla_j - \frac{1}{c^2} F_j \right) F^j = -\frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 + U), \quad (2.23)$$

$${}^* \nabla_j (h^{ij} D - D^{ij}) = 0, \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} {}^* \frac{\partial D_{ik}}{\partial t} - D_{ij} D_k^j + D D_{ik} - D_{ij} D_k^j + \frac{1}{2} ({}^* \nabla_i F_k + {}^* \nabla_k F_i) - \\ - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где  ${}^* \nabla_i$  символ х.и.-дифференцирования. Х.и.-уравнения закона сохранения (1.96–1.97) также упрощаются до

$$D \rho_0 + \frac{1}{c^2} D_{ij} U^{ij} = 0, \quad (2.26)$$

$${}^* \widetilde{\nabla}_i U^{ik} - \rho_0 F^k = 0, \quad (2.27)$$

где мы обозначаем  ${}^* \widetilde{\nabla}_i = {}^* \nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$ .

Подставим в х.и.-уравнения Эйнштейна (2.23–2.25) х.и.-характеристики пространства сферически-симметричной метрики (2.1), а также х.и.-компоненты тензора энергии-импульса идеальной жидкости. После некоторых вычислений получаем х.и.-уравнения Эйнштейна (2.23–2.25) в покомпонентной записи

$$\begin{aligned} e^{-\nu} \left( \ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) - c^2 e^{-\lambda} \left[ \nu'' - \frac{\lambda' \nu'}{2} + \frac{2\nu'}{r} + \frac{(\nu')^2}{2} \right] = \\ = -\kappa (\rho_0 c^2 + 3p) e^{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\frac{\dot{\lambda}}{r} e^{-\lambda - \frac{\nu}{2}} = 0, \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} e^{\lambda - \nu} \left( \ddot{\lambda} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} \right) - c^2 \left[ \nu'' - \frac{\lambda' \nu'}{2} + \frac{(\nu')^2}{2} \right] + \frac{2c^2 \lambda'}{r} = \\ = \kappa (\rho_0 c^2 - p) e^{\lambda}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{c^2 (\lambda' - \nu')}{r} e^{-\lambda} + \frac{2c^2}{r^2} (1 - e^{-\lambda}) = \kappa (\rho_0 c^2 - p). \quad (2.31)$$

Второе уравнение показывает, что в этом случае  $\dot{\lambda} = 0$ . Это означает, что внутреннее пространство жидкой сферы не деформируется: согласно (2.13) при  $\dot{\lambda} = 0$  мы имеем  $D_{11} = 0$ ,  $D^{11} = 0$  и  $D = 0$ . Учитывая это обстоятельство, а также стационарность  $\lambda$ , приведем уравнения поля (2.28–2.31) к окончательному виду

$$c^2 e^{-\lambda} \left[ v'' - \frac{\lambda' v'}{2} + \frac{2v'}{r} + \frac{(v')^2}{2} \right] = \kappa (\rho_0 c^2 + 3p) e^{\lambda}, \quad (2.32)$$

$$\frac{2c^2 \lambda'}{r} - c^2 \left[ v'' - \frac{\lambda' v'}{2} + \frac{(v')^2}{2} \right] = \kappa (\rho_0 c^2 - p) e^{\lambda}, \quad (2.33)$$

$$\frac{c^2 (\lambda' - v')}{r} e^{-\lambda} + \frac{2c^2}{r^2} (1 - e^{-\lambda}) = \kappa (\rho_0 c^2 - p). \quad (2.34)$$

Для решения уравнений поля (2.32–2.34) нам нужна формула для давления  $p$ . Чтобы найти эту формулу, мы рассмотрим уравнения сохранения (2.26–2.27). Однако из-за отсутствия деформации пространства в рассматриваемом случае ( $D_{ik} = 0$ ) х.и.-скалярное уравнение сохранения (2.26) вымывается. Остаётся только х.и.-векторное уравнение сохранения (2.27). Он принимает вид

$${}^* \nabla_i (p h^{ik}) - \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (2.35)$$

Так как  ${}^* \nabla_i h^{ik} = 0$  всегда истинно для х.и.-метрического тензора (как и условие  $\nabla_\sigma g^{\alpha\sigma} = 0$  для фундаментального метрического тензора), оставшееся уравнение сохранения (2.35) принимает вид

$$h^{ik} \frac{{}^* \partial p}{\partial x^i} - \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (2.36)$$

Так как  $\frac{{}^* \partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}$  в пространстве без вращения, эта формула сводится к нетривиальному уравнению, имеющему вид

$$p' e^{-\lambda} + \left( \rho_0 c^2 + p \right) \frac{v'}{2} e^{-\lambda} = 0, \quad (2.37)$$

где  $p' = \frac{dp}{dr}$ ,  $v' = \frac{dv}{dr}$  и  $e^{-\lambda} \neq 0$ . Разделив обе части этого уравнения (2.37) на  $e^{-\lambda}$ , мы получаем уравнение

$$\frac{dp}{\rho_0 c^2 + p} = -\frac{dv}{2}, \quad (2.38)$$

которое представляет собой простое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Оно легко интегрируется как

$$\rho_0 c^2 + p = B e^{-\frac{v}{2}}, \quad B = \text{const.} \quad (2.39)$$

Таким образом, мы получаем давление  $p$  как функцию от  $v$

$$p = B e^{-\frac{v}{2}} - \rho_0 c^2. \quad (2.40)$$

При поиске функции  $p(r)$ , мы интегрируем уравнения поля (2.32–2.34). Суммируя (2.32) и (2.33), мы находим

$$\frac{c^2 (\lambda' + v')}{r} = \kappa B e^{\lambda - \frac{v}{2}}. \quad (2.41)$$

Выразим отсюда  $v'$ , затем подставим результат в (2.34). В результате мы получаем

$$\frac{2c^2}{r} \lambda' + \frac{2c^2}{r^2} (e^\lambda - 1) - \kappa B e^{-\lambda - \frac{v}{2}} = \kappa (\rho_0 c^2 - p) e^\lambda. \quad (2.42)$$

Подставив  $p$  из (2.40) в (2.42), получаем следующее дифференциальное уравнение относительно  $\lambda$

$$\lambda' + \frac{e^\lambda - 1}{r} - \kappa \rho_0 r e^\lambda = 0. \quad (2.43)$$

Введём новую переменную  $y = e^\lambda$ . Таким образом,  $\lambda' = \frac{y'}{y}$ . Подставляя в это уравнение  $y$  и  $y'$ , получаем уравнение Бернулли (см. Камке [31], часть III, глава I, §1.34)

$$y' + f(r)y^2 + g(r)y = 0, \quad (2.44)$$

где

$$f(r) = \frac{1}{r} - \kappa \rho_0 r, \quad g(r) = -\frac{1}{r}. \quad (2.45)$$

Оно имеет следующее решение

$$\frac{1}{y} = E(r) \int \frac{f(r) dr}{E(r)}, \quad (2.46)$$

где

$$E(r) = e^{\int g(r) dr}. \quad (2.47)$$

Интегрируя (2.47), получаем  $E(r)$ , т.е.

$$E(r) = e^{-\int \frac{dr}{r}} = e^{\ln \frac{L}{r}} = \frac{L}{r}, \quad L = \text{const} > 0, \quad (2.48)$$

таким образом, мы получаем  $\frac{1}{y} = e^{-\lambda}$ , что равно

$$e^{-\lambda} = \frac{L}{r} \int \frac{r}{L} \left( \frac{1}{r} - \kappa \rho_0 r \right) dr = 1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3} + \frac{Q}{r}, \quad Q = \text{const}. \quad (2.49)$$

Чтобы найти константу интегрирования  $Q$ , перепишем уравнение (2.42) как

$$e^{-\lambda} \left( \frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \kappa \rho_0. \quad (2.50)$$

Это уравнение имеет сингулярность в точке  $r = 0$ , где численное значение правого члена уравнения (плотность жидкости) возрастает до бесконечности при  $r \rightarrow 0$ , т.е. в центре сферы. Это противоречит изначально принятому условию  $\rho_0 = \text{const}$ , характеризующему несжимаемые жидкости. По сути, этого противоречия не должно быть в теории.

Мы устраним это противоречие (и сингулярность), переписав (2.50) в следующем виде

$$e^{-\lambda} (1 - r\lambda') = \frac{d}{dr} (r e^{-\lambda}) = 1 - \kappa \rho_0 r^2. \quad (2.51)$$

После интегрирования получаем

$$r e^{-\lambda} = r - \frac{\kappa \rho_0 r^3}{3} + A, \quad A = \text{const}. \quad (2.52)$$

Поскольку постоянная интегрирования  $A = 0$  в центральной точке  $r = 0$ , она должна быть равна нулю и в любой другой точке. Разделив это уравнение на  $r \neq 0$ , получим

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}. \quad (2.53)$$

Сравнивая это решение с формулой для  $e^{-\lambda}$ , полученной ранее (2.49), мы видим, что они совпадают, если  $Q = 0$ . Кроме того, следует предположить, что  $e^{\lambda_0} = 1$  в центральной точке  $r = 0$ , следовательно,  $\lambda_0 = 0$ .

Таким образом, мы получили компоненты  $h^{11} = e^{-\lambda}$  и  $h_{11} = e^{\lambda}$  х.и.-метрического тензора  $h_{ik}$  в виде, выраженном через радиальную координату  $r$ , т.е.

$$h^{11} = e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}, \quad h_{11} = e^{\lambda} = \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}. \quad (2.54)$$

Далее мы вводим пограничное условие  $r = a$  на поверхности сферы, где  $a$  радиус сферы. Таким образом,

$$e^{-\lambda_a} = 1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}. \quad (2.55)$$

С другой стороны, решение этого уравнения также является решением для точечной массы в пустоте. Следовательно,

$$e^{-\lambda_a} = 1 - \frac{2GM}{c^2 a}, \quad (2.56)$$

где  $M$  масса жидкой сферы. Сравнивая обе эти формулы для  $e^{-\lambda_a}$  и принимая во внимание, что гравитационная постоянная Эйнштейна равна  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ , мы находим

$$M = \frac{4\pi a^3 \rho_0}{3} = \rho_0 V, \quad (2.57)$$

где  $V = \frac{4\pi a^3}{3}$  объём сферы. Таким образом, мы получили обычную связь между массой и объёмом однородной сферы.

Следующим нашим шагом будет поиск решения  $e^{-\lambda}$  вне сферы, где  $r > a$ . Поскольку вне жидкой сферы плотность вещества равна  $\rho_0 = 0$ , после интегрирования (2.51) получаем

$$r e^{-\lambda} = \int_0^r dr - \int_0^a \kappa\rho_0 r^2 dr = r - \frac{\kappa\rho_0 a^3}{3}. \quad (2.58)$$

Из этой формулы мы получаем, что

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{\kappa\rho_0 a^3}{3r}. \quad (2.59)$$

Принимая во внимание (2.55) и (2.56), мы приходим к такому же решению, что и решение для точечной массы в пустоте

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (2.60)$$

Для получения переменной  $v$  используем уравнение (2.41). Подставляя

$$\lambda' = \frac{\frac{2\kappa\rho_0 r}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \quad (2.61)$$

а также полученную формулу для  $e^\lambda$  в (2.41), после преобразований получаем

$$v' + \frac{\frac{2\kappa\rho_0 r^2}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} - \frac{\kappa B}{c^2} \frac{r e^{-\frac{v}{2}}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = 0. \quad (2.62)$$

Введём новую переменную  $e^{-\frac{v}{2}} = y$ . Таким образом,  $v' = -\frac{2y'}{y}$ . Подставляя их в (2.62), мы получаем уравнение Бернулли

$$y' + \frac{\kappa B}{2c^2} \frac{r y^2}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} - \frac{\frac{\kappa\rho_0 r}{3} y}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = 0, \quad (2.63)$$

где

$$f(r) = \frac{\kappa B}{2c^2} \frac{r}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad g(r) = -\frac{\frac{\kappa\rho_0 r}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}. \quad (2.64)$$

Таким образом, мы имеем интеграл

$$\int g(r) dr = -\int \frac{\frac{\kappa\rho_0 r}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \ln N \sqrt{\left|1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right|}, \quad N = const, \quad (2.65)$$

где

$$E(r) = N \sqrt{\left|1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right|}. \quad (2.66)$$

В области, где выполняется сигнатурное условие  $h_{11} = e^\lambda > 0$ , мы имеем

$$1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3} > 0, \quad (2.67)$$

поэтому мы используем здесь модуль функции.

Далее мы ищем  $\frac{1}{y} = e^{\frac{v}{2}}$ , что равно

$$e^{\frac{v}{2}} = \frac{\kappa B}{2c^2} \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \int \frac{r dr}{\sqrt{\left(1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right)^3}}. \quad (2.68)$$

После интегрирования мы получаем

$$e^{\frac{y}{2}} = \frac{\kappa B}{2c^2} \left( \frac{3}{\kappa\rho_0} + K \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \right), \quad K = const. \quad (2.69)$$

Теперь найдём константы  $B$  и  $K$ . Чтобы найти  $B$ , перепишем формулу для давления  $p$  (2.40) при условии, что  $p = 0$  на поверхности сферы ( $r = a$ ). Таким образом, мы получаем

$$B = \rho_0 c^2 e^{\frac{y_a}{2}}, \quad (2.70)$$

где  $e^{\frac{y_a}{2}}$  есть значение функции  $e^{\frac{y}{2}}$  на поверхности сферы. В итоге мы имеем

$$e^{\frac{y}{2}} = \frac{\kappa\rho_0}{2} e^{\frac{y_a}{2}} \left( \frac{3}{\kappa\rho_0} + K \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \right). \quad (2.71)$$

Чтобы найти  $K$ , мы рассмотрим значение функции  $e^{\frac{y}{2}}$  на поверхности сферы ( $r = a$ )

$$e^{\frac{y_a}{2}} = \frac{\kappa\rho_0 e^{\frac{y_a}{2}}}{2} \left( \frac{3}{\kappa\rho_0} + K \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} \right), \quad (2.72)$$

откуда получаем, что

$$K = -\frac{1}{\kappa\rho_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}}. \quad (2.73)$$

Величина  $e^{\frac{y_a}{2}}$  означает численное значение  $e^{\frac{y}{2}}$  при  $r = a$ , т.е. на поверхности сферы. Следовательно, мы можем применить его к решению для точечной массы в пустоте при  $r = a$ , т.е.

$$e^{\frac{y_a}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}}. \quad (2.74)$$

Принимая во внимание формулы (2.55) и (2.56), получаем

$$\begin{aligned} e^{\frac{y}{2}} &= \frac{1}{2} e^{\frac{y_a}{2}} \left( 3 - \sqrt{\frac{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}} - \sqrt{1 - \frac{2GM r^2}{c^2 a^3}} \right). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Это решение на поверхности сферы ( $r = a$ ) соответствует решению для точечной массы в пустоте:  $e^{\frac{\nu_a}{2}} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}} = \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}}$ .

Таким образом, с учётом полученных формул для  $\nu$  и  $\lambda$ , метрика пространства сферы, заполненной идеальной жидкостью, имеет следующий вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.76)$$

Принимая во внимание (2.55) и (2.56), мы перепишем эту формулу (2.76) в виде

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 a}} - \sqrt{1 - \frac{2GM r^2}{c^2 a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM r^2}{c^2 a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.77)$$

Наконец, поскольку  $\frac{2GM}{c^2} = r_g$  есть гильбертов радиус, вычисляемый по массе  $M$  жидкой сферы, и принимая во внимание полученную формулу для  $e^{\frac{\nu_a}{2}}$ , мы переписываем полученную метрику в окончательном виде

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.78)$$

Это — окончательная формула для “внутренней” метрики пространства сферы, заполненной идеальной жидкостью. Как видно из этой формулы, “внутренняя” метрика на поверхности жидкой сферы ( $r = a$ ) полностью совпадает с метрикой пространства точечной массы в пустоте.

Отсюда мы можем получить метрику пространства вне жидкой сферы ( $r > a$ ). Давайте сделаем это.

Мы уже получили “внешнее” решение для  $e^{-\lambda}$  (2.59), которое оказалось совпадающим с “внешним” решением для точечной массы для этой функции (2.60). Вне сферы  $B = 0$  (2.39). Следовательно, (2.41) принимает вид

$$\lambda' + \nu' = 0, \quad (2.79)$$

где, согласно (2.60),

$$\lambda' = \frac{2GM}{c^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (2.80)$$

Подставляя (2.80) в (2.79), затем интегрируя полученное уравнение, мы получаем

$$\nu = \ln \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) + P, \quad P = const, \quad (2.81)$$

так что

$$e^\nu = P \left( 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right). \quad (2.82)$$

Поскольку эта функция также имеет вид

$$e^\nu = 1 - \frac{2GM}{c^2 a}, \quad (2.83)$$

на поверхности ( $r = a$ ) жидкой сферы мы получаем  $P = 1$ . Подставляя полученные формулы для  $e^\nu$  (2.83) и  $e^\lambda$  (2.60) в сферически-симметричную метрику (2.1), мы получаем, что “внешнее” пространство сферы, заполненной идеальной жидкостью, описывается метрикой точечной массы в пустоте (1.1), т.е.

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.84)$$

## 2.2 Внешний разрыв пространства поля Солнца совпадает с поясом астероидов

Здесь мы предлагаем новую модель Солнечной системы в соответствии с общей теорией относительности. А именно — Солнце и планеты будем считать жидкими сферами согласно метрике жидкой сферы (2.78), полученной нами выше. Эта метрика также была приведена в формуле (1.8), в §1.2, где мы рассматривали постановку

задачи моделирования звезды в терминах общей теории относительности. Также, как было доказано в предыдущем §2.1, внешнее пространство жидкой сферы описывается метрикой точечной массы в пустоте (1.1).

Обратите внимание, что здесь мы не обсуждаем, могут ли внутренние планеты быть представлены в виде жидких сфер или нет. Астрофизики и геологи могут просто апеллировать к магме, потому что она находится в состоянии жидкого камня. Однако юпитерианские планеты (Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун) по плотности и другим параметрам вполне могут считаться звёздами. Здесь мы ограничиваемся только теоретическим моделированием Солнца и планет без анализа их происхождения. Подробно мы сосредоточимся на расположении “внутреннего” и “внешнего” пространственных разрывов их полей: пространственных разрывов в поле внутри и вне физического тела (жидкой сферы) каждой из них. Затем мы сравним полученный результат с наблюдаемым распределением планет в Солнечной системе.

Наш подход к Солнечной системе прост. Как известно, в четырёхмерном римановом пространстве со знакопеременной диагональной метрикой (+---) разрыв происходит в той области (точке или поверхности) пространства, где хотя бы одно из четырёх сигнатурных условий

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &> 0 \\ g_{00} g_{11} &< 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &> 0 \\ g &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

нарушается. Пространство (пространство-время) общей теории относительности относится к такому типу римановых пространств. Поэтому мы рассматриваем сигнатурные условия в пространстве внутри и вне жидкого Солнца.

**2.2.1** В метрике “внутреннего” пространства жидкой сферы (2.78), учитывая, что там\*

$$\frac{\kappa \rho_0 a^3}{3r} = \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{r_g}{r}, \quad (2.86)$$

\* См. формулы (2.59) и (2.60) в §2.1.

а фундаментальный метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты

$$\begin{aligned} g_{00} &= \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.87)$$

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} = -\frac{1}{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.88)$$

$$g_{22} = -r^2, \quad (2.89)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.90)$$

Из этих компонент мы получаем, что на расстоянии от центра сферы, равном

$$r = r_{br} = \sqrt{\frac{a^3}{r_g}} = \sqrt{\frac{3}{\kappa \rho_0}}, \quad (2.91)$$

нарушаются второе, третье и четвёртое сигнатурные условия\*

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= \frac{9}{4} \left( 1 - \frac{r_g}{a} \right) > 0 \\ g_{00} g_{11} &\rightarrow -\infty \\ g_{00} g_{11} g_{22} &\rightarrow \infty \\ g &= g_{00} g_{11} g_{22} g_{33} \rightarrow -\infty \end{aligned} \right\}. \quad (2.92)$$

Это означает, что на расстоянии  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$  от центра жидкого сферического тела его поле имеет пространственный разрыв на сферической поверхности упомянутого радиуса  $r_{br}$ .

Гильбертов радиус  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  (радиус гравитационного коллапса), рассчитанный для обычных физических тел, на много порядков меньше их физических размеров. То есть  $a \gg r_g$  для обычного сферического жидкого тела (такое тело не является коллапсаром).

\*А именно — эти три функции стремятся к бесконечности. Как известно, функция имеет разрыв при стремлении к бесконечности.

Следовательно, в этом случае  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} \gg a$ : сферическая поверхность пространственного разрыва в поле расположена далеко вне физической поверхности жидкой сферы (источника поля) и, таким образом, далеко от её внутреннего поля. Другими словами, внутреннее поле и вещество жидкой сферы производят пространственный разрыв в её внешнем поле.

Что означает пространственный разрыв поля звезды с физической точки зрения? Имеет ли этот пространственный разрыв реальное влияние на физическое тело, попадающее в него, или это — всего лишь математическая фикция? Как мы покажем в §2.3, пространство (пространство-время) жидкой сферы имеет разрыв четырёхмерного тензора кривизны  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  при условии  $r = r_{br}$ . А именно, компонента  $R_{0101}$  (2.113), представляющая собой четырёхмерную кривизну пространства в  $(r-t)$ -направлении 0101, имеет разрыв на расстоянии  $r = r_{br}$  от центра жидкой сферы: функция кривизны становится бесконечной ( $R_{0101} \rightarrow \infty$ ) на поверхности радиусом  $r = r_{br}$ . Поскольку четырёхмерная кривизна определяется гравитационным полем, заполняющим пространство, и наоборот, то разрыв на  $r = r_{br}$  подразумевает разрыв в гравитационном поле жидкой сферы.

В этом заключается физический смысл пространственного разрыва в поле жидкой сферы.

**2.2.2** Внешнее поле жидкой сферы обусловлено тем же жидким веществом, которое заполняет сферу и создаёт поле внутри самой сферы (её внутреннее поле). Согласно метрике “внешнего” пространства (2.84), мы видим, что его фундаментальный метрический тензор имеет следующие ненулевые компоненты

$$g_{00} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad (2.93)$$

$$g_{11} = -\frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad (2.94)$$

$$g_{22} = -r^2, \quad (2.95)$$

$$g_{33} = -r^2 \sin^2\theta. \quad (2.96)$$

Мы видим, что на расстоянии

$$r = r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.97)$$

от центра тела нарушается первое сигнатурное условие ( $g_{00} > 0$ )

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= 1 - \frac{r_g}{r} = 0 \\ g_{00} g_{11} &= -1 < 0 \\ g_{00} g_{11} g_{22} &= r^2 > 0 \\ g &= -r^4 \sin^2 \theta < 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.98)$$

Другими словами, внешнее поле жидкой сферы производит разрыв пространства в глубине самой сферы, вблизи её центра. Например, рассчитанный гильбертов радиус  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  для Солнца составляет всего 2,9 км, а для Земли это всего лишь 0,88 см.

**2.2.3** Итак, согласно нашей новой модели жидких звёзд в соответствии с общей теорией относительности, применительно к обычным звёздам и, в частности, к Солнцу, из вышеприведённых выводов вытекает следующее:

1. В центре каждой звезды существует небольшое ядро гильбертова радиуса  $r_g$  от её центра, на котором происходит упомянутый внутренний пространственный разрыв в поле звезды. Внутренний пространственный разрыв физически означает, что жидкое вещество звезды имеет сингулярность на сферической поверхности гильбертова радиуса  $r_g$  вокруг центра, тем самым это маленькое ядро физически отделено от основной массы вещества звезды (физический смысл этого явления будет понятнее на примере внешнего пространственного разрыва в поле Солнца);
2. Поле каждой звезды имеет внешний пространственный разрыв, окружающий звезду сферической поверхностью. Этот “пузырь” имеет очень большой радиус, равный  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$ , что на много порядков превышает физический радиус  $a$  звезды. Физически внешний пространственный разрыв препятствует формированию ближнего вещества, такого как мелкие камни или пыль, вращающиеся вокруг звезды, в единую планету на орбите радиусом  $r_{br}$ .

Рассчитаем теперь радиус  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$  (2.91) внешнего пространственного разрыва в поле Солнца. Подставляя плотность Солнца  $\rho_0 = 1,41$  грамм/см<sup>3</sup> или его массу  $M = 2,0 \times 10^{33}$  грамм

и радиус  $a = 6,95 \times 10^{10}$  см, мы получаем

$$r_{br} = 3,4 \times 10^{13} \text{ см} = 340\,000\,000 \text{ км} = 2,3 \text{ а.е.} \quad (2.99)$$

Получается, что сферическая поверхность (пузырь) внешнего пространственного разрыва в поле Солнца находится в пределах пояса астероидов, очень близко к орбите максимальной концентрации астероидов (как известно, пояс астероидов расположен примерно от 2,1 до 4,3 а.е. от Солнца).

Это поистине удивительное теоретическое открытие приводит нас к выводу, что внутреннее строение Солнечной системы можно рассчитать по жидкостной модели. А именно — мы считаем Солнце и планеты жидкими сферами, а затем вычисляем внешний пространственный разрыв  $r_{br}$  в поле каждого из этих космических тел. Результаты этих расчётов собраны в таблице 2.1.

Эти результаты, связанные с планетами и Солнцем, согласно таблице 2.1, приводят к следующим выводам:

1. Внешний пространственный разрыв в поле Солнца находится на расстоянии  $r = 2,3$  а.е. от Солнца, т.е. вблизи максимальной концентрации астероидов в поясе астероидов;
2. Внутренние планеты Солнечной системы (Марс, Земля, Венера и Меркурий) расположены внутри “пузыря” внешнего пространственного разрыва в поле Солнца;
3. “Пузыри” с поверхностью внешнего пространственного разрыва в поле каждой из внутренних планет также расположены внутри “пузыря” внешнего пространственного разрыва в поле Солнца;
4. Внешний пространственный разрыв полей Марса и Земли достигает пояса астероидов;
5. Внешний пространственный разрыв поля Марса находится на расстоянии 2,9 а.е. от Солнца. Он находится в поясе астероидов вблизи орбиты Фэтона, гипотетической планеты, которая когда-то обращалась вокруг Солнца по закону Тициуса-Боде на  $r = 2,8$  а.е. и разрушение которой в древности породило пояс астероидов;
6. “Пузырь” внешнего пространственного разрыва в поле Юпитера с внутренней стороны встречается с марсианским на расстоянии  $r = 2,9$  а.е. от Солнца (при “параде планет”). Это очень

Объект	Масса $M$ , грамм	Плотность $\rho_0$ , грамм/см <sup>3</sup>	Радиус $a$ , см	Гильбертов радиус $r_g$ , см	Орбита, а.е.	Разрыв $r_{br}$ , а.е.	Расстояние $r_{br}$ от Солнца, а.е.
Солнце	$1,98 \times 10^{33}$	1,41	$6,95 \times 10^{10}$	$2,9 \times 10^5$	—	2,3	2,3
Внутренние планеты							
Меркурий	$2,21 \times 10^{26}$	4,10	$2,36 \times 10^8$	0,03	0,39	1,3	-0,9 – 1,7
Венера	$4,93 \times 10^{27}$	5,10	$6,19 \times 10^8$	0,73	0,72	1,2	-0,5 – 1,9
Земля	$5,97 \times 10^{27}$	5,52	$6,38 \times 10^8$	0,88	1,00	1,1	-0,1 – 2,1
Марс	$6,45 \times 10^{26}$	3,80	$3,44 \times 10^8$	0,10	1,52	1,4	0,1 – 2,9
Пояс астероидов	—	—	—	—	2,5*	—	—
Внешние планеты							
Юпитер	$1,90 \times 10^{30}$	1,38	$7,11 \times 10^9$	280	5,20	2,3	2,9 – 7,5
Сатурн	$5,68 \times 10^{29}$	0,72	$6,00 \times 10^9$	84	9,54	3,2	6,3 – 12,7
Уран	$8,72 \times 10^{28}$	1,30	$2,55 \times 10^9$	13	19,2	2,4	16,8 – 21,6
Нептун	$1,03 \times 10^{29}$	1,20	$2,74 \times 10^9$	15	30,1	2,4	27,7 – 32,5
Плутон	$1,31 \times 10^{25}$	2,00	$1,20 \times 10^8$	0,002	39,5	1,9	37,6 – 41,4
Пояс Койпера	—	—	—	—	30 – 100	—	—

\*Максимальная концентрация вещества в поясе астероидов зарегистрирована на  $\sim 2,5$  а.е. от Солнца, а пояс астероидов простирается от 2,1 до 4,3 а.е. (приблизительно).

Таблица 2.1: Внутреннее строение Солнечной системы согласно общей теории относительности.

близко к 2,8 а.е., что является теоретической орбитой Фаэтона согласно закону Тициуса-Боде;

7. “Пузыри” внешнего пространственного разрыва в полях других юпитерианских планет (Сатурна, Урана и Нептуна) расположены в пределах внутренней границы пояса Койпера (полосы афелиев комет, обращающихся вокруг Солнца);
8. Внешний пространственный разрыв в поле Нептуна совпадает с внешней стороны этого “пузыря” с внутренней границей пояса Койпера;
9. “Пузырь” внешнего пространственного разрыва в поле Плутона полностью расположен в поясе Койпера.

Тот факт, что внешний пространственный разрыв в поле Солнца находится в пределах пояса астероидов, вблизи максимальной концентрации астероидов, позволяет сказать: да, рассматриваемый в данной работе пространственный разрыв имеет реальный физический смысл. Наиболее вероятно, что именно внешний пространственный разрыв в поле Солнца препятствует объединению астероидов в единое физическое тело (называемое Фаэтон). В качестве альтернативы, если Фаэтон был уже существующей планетой, вращавшейся вокруг Солнца вблизи “орбиты пространственного разрыва” в прошлом, сила гравитации другого массивного космического тела, появившегося вблизи Солнечной системы в древние времена (например, другой звезды, проходившей рядом с ней), сместила Фаэтон на “орбиту разрыва пространства” рядом с ним, что привело к разрушению тела Фаэтона.

Таким образом, мы приходим к выводу, что внутреннее строение Солнечной системы формируется геометрической структурой поля Солнца в соответствии с римановой геометрией, проявляющейся в виде законов общей теории относительности.

### **2.3 Геометрический смысл разрыва внешнего пространства звезды**

Рассмотрим свойства кривизны пространства жидкой сферы. Сначала вычислим компоненты х.и.-тензора кривизны  $C_{lkij}$ , который является физически наблюдаемым тензором кривизны.

В невращающемся пространстве ( $A_{jk} = 0$ ) рассматриваемой жидкой сферы,  $C_{lkij} = H_{lkij}$  по определению тензора  $H_{lkij}$  (1.81). Поэтому

мы вычисляем  $C_{lkij} = H_{lkij} = h_{jm} H_{lki}^{\dots m}$  по формуле  $H_{lki}^{\dots m}$  (1.78), куда подставляем соответствующие х.и.-символы Кристоффеля  $\Delta_{jk}^i$  (2.17–2.19), полученные для метрики жидкой сферы (2.78). После вычислений получаем его ненулевые компоненты

$$C_{1212} = H_{1212} = -\frac{\varkappa\rho_0}{3} \frac{r^2}{1 - \frac{\varkappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.100)$$

$$C_{1313} = H_{1313} = -\frac{\varkappa\rho_0}{3} \frac{r^2 \sin^2\theta}{1 - \frac{\varkappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.101)$$

$$C_{2323} = H_{2323} = -\frac{\varkappa\rho_0}{3} r^4 \sin^2\theta. \quad (2.102)$$

Мы видим, что в пространстве жидкой сферы ненулевые компоненты тензора наблюдаемой кривизны пространства  $C_{iklj}$  удовлетворяют следующему условию

$$C_{iklj} = -\frac{\varkappa\rho_0}{3} (h_{kl}h_{ij} - h_{il}h_{kj}), \quad (2.103)$$

где отрицательная константа  $-\frac{\varkappa\rho_0}{3}$  представляет собой наблюдаемую трёхмерную кривизну пространства в соответствующем двумерном направлении. Это означает, что трёхмерное пространство невращающейся жидкой сферы имеет *постоянную отрицательную кривизну*.

Вычисляя наблюдаемую скалярную кривизну  $C = h^{ik}C_{ik}$ , где ненулевые компоненты  $C_{ik}$  равны

$$C_{11} = -\frac{2\varkappa\rho_0}{3} \frac{1}{1 - \frac{\varkappa\rho_0 r^2}{3}}, \quad (2.104)$$

$$C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2\theta} = -\frac{2\varkappa\rho_0 r^2}{3}, \quad (2.105)$$

мы получаем

$$C = -2\varkappa\rho_0 = const < 0. \quad (2.106)$$

Следовательно, согласно (2.103), х.и.-тензор кривизны  $C_{iklj}$  выражается через наблюдаемую скалярную кривизну  $C$  как

$$C_{iklj} = \frac{C}{6} (h_{kl}h_{ij} - h_{il}h_{kj}). \quad (2.107)$$

Итак, наблюдаемое трёхмерное пространство невращающейся жидкой сферы является *пространством постоянной отрицательной кривизны*. Радиус его кривизны  $\mathfrak{K}$  является мнимым:  $\mathfrak{K}$  выражается через наблюдаемую скалярную кривизну  $C$  как

$$C = -2\kappa\rho_0 = \frac{1}{\mathfrak{K}^2}, \quad (2.108)$$

и, таким образом, мы получаем

$$\mathfrak{K} = \frac{i}{2\kappa\rho_0}. \quad (2.109)$$

Теперь вычислим компоненты тензора Римана-Кристоффеля

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial x^\beta \partial x^\gamma} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^\alpha \partial x^\delta} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial x^\alpha \partial x^\gamma} - \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial x^\beta \partial x^\delta} \right) + g^{\sigma\tau} \left( \Gamma_{\alpha\delta,\sigma} \Gamma_{\beta\gamma,\tau} - \Gamma_{\beta\delta,\sigma} \Gamma_{\alpha\gamma,\tau} \right). \quad (2.110)$$

Согласно метрике жидкой сферы (2.78) мы имеем  $g_{ik} = -h_{ik}$  и  $\Gamma_{ik,j} = -\Delta_{ik,j}$ . Вычисляя ненулевые компоненты  $\Gamma_{\alpha\beta,\delta}$

$$\Gamma_{01,0} = -\Gamma_{00,1} = \frac{\kappa\rho_0 r}{12} \frac{3\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.111)$$

$$\Gamma_{11,1} = -\frac{\kappa\rho_0 r}{3} \frac{1}{\left(1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}\right)^2}, \quad (2.112)$$

и подставляя их в (2.110), получаем

$$R_{0101} = -\frac{\kappa\rho_0}{12} \frac{3\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.113)$$

$$R_{1212} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = -C_{1212}, \quad (2.114)$$

$$R_{1313} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2 \sin^2 \theta}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = -C_{1313}, \quad (2.115)$$

$$R_{2323} = \frac{\kappa\rho_0}{3} r^4 \sin^2 \theta = -C_{2323}. \quad (2.116)$$

Мы видим, что компонента  $R_{0101}$ , определяющая четырёхмерную кривизну в  $(r-t)$ -направлении 0101, не удовлетворяет условию четырёхмерных пространств постоянной кривизны

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = Q(g_{\beta\gamma}g_{\alpha\delta} - g_{\beta\delta}g_{\alpha\gamma}), \quad Q = const. \quad (2.117)$$

Таким образом, мы приходим к следующему выводу:

Четырёхмерное пространство (пространство-время) невращающейся жидкой сферы *не является* пространством постоянной кривизны. Напротив, её наблюдаемое трёхмерное пространство, как было доказано выше, является *пространством постоянной отрицательной кривизны*.

Мы также видим из полученных формул для  $C_{1212}$  (2.100) и  $C_{1313}$  (2.101), что трёхмерная наблюдаемая кривизна  $C_{iklj}$  обладает пространственным разрывом

$$C_{1212} \rightarrow -\infty, \quad C_{1313} \rightarrow -\infty \quad (2.118)$$

при условии  $r = r_{br} = \sqrt{3/\kappa\rho_0} = \sqrt{a^3/r_g}$ . При этом же условии  $r = r_{br}$  по формуле для  $R_{0101}$  (2.113) мы имеем

$$R_{0101} \rightarrow -\infty. \quad (2.119)$$

Другими словами, трёхмерная х.и.-кривизна  $C_{iklj}$  и четырёхмерная риманова кривизна  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  имеют пространственный разрыв при  $r = r_{br}$ . Применительно к модели жидких звёзд это означает:

В поле любой звезды наблюдаемая трёхмерная кривизна пространства  $C_{iklj}$  и четырёхмерная риманова кривизна  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  имеют общий пространственный разрыв на сферической поверхности на расстоянии  $r = r_{br} = \sqrt{3/\kappa\rho_0} = \sqrt{a^3/r_g}$  от звезды.

В этом заключается геометрический смысл внешнего пространственного разрыва в поле звезды (в рамках рассматриваемой жидкостной модели).

## 2.4 Сила гравитации, действующая внутри жидкой звезды

Гравитационно-инерциальная сила  $F_i$  (1.42) в невращающемся пространстве обусловлена только компонентой  $g_{00}$  (которая определяется гравитационным потенциалом  $w$ ). Вычислим эту силу. Так

как гравитационный потенциал равен  $w = c^2(1 - \sqrt{g_{00}})$ , мы имеем

$$F_i = \frac{\partial w}{\partial x^i} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i}. \quad (2.120)$$

Согласно “внутренней” метрике невращающейся жидкой сферы (2.76) мы имеем

$$g_{00} = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2, \quad (2.121)$$

или, в той же метрике, но записанной в другой форме (2.78),

$$g_{00} = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2. \quad (2.122)$$

Отсюда получаем, что гравитационно-инерциальная сила, действующая внутри невращающейся жидкой сферы, равна

$$F_1 = -\frac{\kappa \rho_0 c^2 r}{3} \frac{1}{\left( 3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right) \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.123)$$

$$F^1 = -\frac{\kappa \rho_0 c^2 r}{3} \frac{\sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}}, \quad (2.124)$$

или, в другой форме,

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{1}{\left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (2.125)$$

$$F^1 = -\frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (2.126)$$

Это — сила притяжения: так как  $r < a$  внутри сферы, то  $F_1 < 0$  в ней. Эта сила пропорциональна расстоянию  $r$ . Численное значение этой силы равно нулю в центре сферы, затем увеличивается

с расстоянием до своего максимального значения на поверхности звезды (где  $r = a$ )

$$(F_1)_{r=a} = -\frac{\kappa\rho_0 c^2 a}{6} \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} = -\frac{c^2 r_g}{2a^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{a}}, \quad (2.127)$$

$$(F^1)_{r=a} = -\frac{\kappa\rho_0 c^2 a}{6} = -\frac{c^2 r_g}{2a^2}. \quad (2.128)$$

## 2.5 Решение уравнений закона сохранения: давление и плотность внутри звёзд

Рассмотрим теперь давление  $p$  и плотность  $\rho_0$  внутри обычной жидкой звезды. Формула, связывающая давление и плотность в среде, называется уравнением состояния. Оно следует как решение уравнений закона сохранения.

После подстановки физически наблюдаемых компонент тензора энергии-импульса идеальной жидкости (2.21) в общие уравнения закона сохранения (1.96–1.97) они принимают вид (2.26–2.27). В недеформирующемся пространстве, таком как пространство обычной звезды, ненулевым остаётся только векторное уравнение сохранения (2.36). Оно решается по формуле (2.40)

$$p = B e^{-\frac{r}{a}} - \rho_0 c^2. \quad (2.129)$$

Подставив уже найденные постоянную интегрирования  $B$  (2.70) и функцию  $e^{\frac{r}{a}}$  (2.75) в  $p$  (2.129), мы получаем формулу, связывающую давление  $p$  и плотность  $\rho_0$  внутри обычной звезды

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}}{3\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}}}. \quad (2.130)$$

Найдём давление в приповерхностном слое звезды. Константа  $\kappa = 18,6 \times 10^{-28}$  см/грамм является очень малой величиной, тогда как  $\rho_0 = 1,4$  грамм/см<sup>3</sup> для Солнца (жёлтого карлика) намного меньше, чем для более крупных звёзд. Поэтому  $\kappa\rho_0 a^2$  намного меньше 1 даже для очень больших звёзд. Например, для Бетельгейзе, одного из крупнейших красных сверхгигантов:  $M = 4,0 \times 10^{34}$  грамм,  $a = 7,0 \times 10^{13}$  см и  $\rho_0 = 2,8 \times 10^{-8}$  грамм/см<sup>3</sup>. В этом случае мы

имеем  $\kappa\rho_0 a^2 = 2,6 \times 10^{-7}$ . В результате имеем

$$\sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \approx 1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{6}, \quad \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} \approx 1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{6}. \quad (2.131)$$

Таким образом, после некоторых вычислений мы получаем приближенную формулу для давления  $p$  внутри обычной звезды

$$p \approx \frac{\kappa\rho_0^2 c^2 (a^2 - r^2)}{12} = \frac{\rho_0 GM}{2a^2} \left( \frac{a^2 - r^2}{a} \right). \quad (2.132)$$

Пусть расстояние  $h$  от поверхности сферы до точки измерения  $h = a - r$ . Поскольку  $h \ll r$  в приповерхностном слое, имеем

$$a^2 - r^2 = (a - r)(a + r) = h(2a + h) \approx 2ah. \quad (2.133)$$

Таким образом, из (2.132) мы получаем обычную формулу для давления в приповерхностном слое звезды

$$p = \rho_0 gh, \quad (2.134)$$

где  $\frac{GM}{a^2} = g$  ускорение свободного падения вблизи поверхности.

Давление в центральной области обычной звезды легко найти, приняв  $r = 0$  в общей формуле (2.130). Обозначая центральное давление как  $p_0 = p_{r=0}$ , получаем

$$p_0 = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - 1} \approx \frac{\kappa\rho_0^2 a^2 c^2}{12}. \quad (2.135)$$

Так как  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2}$ , мы можем переписать эту формулу в виде

$$p_0 \approx \frac{3GM^2}{8\pi a^4}. \quad (2.136)$$

В таблице 2.2 приведены значения центрального давления  $p_0$ , рассчитанные по этой формуле для типичных обычных звёзд.

Мы видим, что, согласно нашей модели жидких звёзд, давление в центральной области Бетельгейзе, одной из крупнейших звёзд, составляет всего 0,53 атмосферного ( $1 \text{ атм} = 10^6 \text{ дин/см}^2$ ). Чем меньше размер звезды, тем выше становится давление внутри неё.

Объект	Масса $M$ , грамм	Радиус $a$ , см	Плотность $\rho_0$ , грамм/см <sup>3</sup>	Давление $p_0$ , дин/см <sup>2</sup>
Красный сверхгигант*	$4,0 \times 10^{34}$	$7,0 \times 10^{13}$	$2,8 \times 10^{-8}$	$5,3 \times 10^5$
Белый сверхгигант†	$3,4 \times 10^{34}$	$4,8 \times 10^{12}$	$7,3 \times 10^{-5}$	$1,7 \times 10^{10}$
Солнце	$2,0 \times 10^{33}$	$7,0 \times 10^{10}$	1,4	$1,3 \times 10^{15}$
Юпитер (протозвезда)	$1,9 \times 10^{30}$	$7,1 \times 10^9$	1,3	$1,2 \times 10^{15}$
Красные карлики	$6,7 \times 10^{32}$	$2,3 \times 10^{10}$	13	$1,3 \times 10^{16}$
Коричневый карлик‡	$4,1 \times 10^{31}$	$7,0 \times 10^9$	29	$5,7 \times 10^{15}$
Белый карлик§	$2,0 \times 10^{33}$	$6,4 \times 10^8$	$1,8 \times 10^6$	$1,9 \times 10^{23}$

\* Бетельгейзе. † Ригель. ‡ Согот-Ехо-3. § Сириус В.

Таблица 2.2: Основные характеристики обычных звёзд.

Центральное давление Ригеля, белого сверхгиганта, радиус которого в 14,6 раза меньше радиуса Бетельгейзе, составляет  $1,7 \times 10^4$  атм. У карликов, таких как Солнце, центральное давление  $\sim 10^9$  атм. У белых карликов (плотность составляющего их вещества очень велика) центральное давление достигает  $10^{17}$  атм.

Отметим, что температура конденсированной материи не зависит от давления. Несжимаемая жидкость звёзд представляет собой своего рода конденсированную материю. Поэтому температуры внутри звёзд зависят исключительно от формулы того конкретного механизма, который производит звёздную энергию.

Это замечание важно для понимания физических условий внутри звёзд и источников звёздной энергии.

## 2.6 Механизм генерации звёздной энергии согласно жидкостной модели звёзд и диаграмме масса-светимость

Перейдём к безразмерным характеристикам звёзд, которые выражаются в долях соответствующих характеристик Солнца

$$\bar{M} = \frac{M}{M_{\odot}}, \quad \bar{a} = \frac{a}{a_{\odot}}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\odot}}, \quad \dots \text{ и т.д.,} \quad (2.137)$$

где  $\bar{M} = \bar{\rho}_0 \bar{a}^3$  для жидкой сферы\*. Для светимости  $L$  звезды, т.е. энергии, излучаемой со всей её поверхности в космос за одну секунду, мы имеем

$$\bar{L} = \frac{L}{L_{\odot}}. \quad (2.138)$$

При таком представлении характеристик звёзд анализ значительно упрощается. Это связано с тем, что в формулах остаются только существенные множители, а все постоянные коэффициенты вымываются.

Теперь изучим, какой механизм производства звёздной энергии можно предложить в соответствии с общей теорией относительности, чтобы его производительность удовлетворяла наблюдаемой светимости звёзд. Другими словами, чтобы быть реальным механизмом, который генерирует энергию в звёздах, расчётное производство энергии предлагаемым механизмом должно соответствовать соотношению масса-светимость, которое является основным эмпирическим соотношением наблюдательной астрофизики.

Рассмотрим таким образом метрику пространства жидкой звезды. Как мы уже знаем, пространство жидкой звезды имеет две главные области, описываемые разными метриками:

1. Внутренняя метрика пространства звезды (метрика жидкой сферы) справедлива от центра звезды до её поверхности, за исключением сингулярной сферической поверхности крошечного радиуса  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  вокруг центра звезды (см. ниже). Внутренняя метрика также справедлива на сингулярной поверхности радиусом  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$  вокруг звезды в далёком космосе: на этой сферической поверхности в далёком космосе гравитационное поле звезды имеет пространственный разрыв, созданный её внутренней метрикой;
2. Внешняя метрика звезды (метрика точечной массы) справедлива от поверхности звезды до бесконечности, за исключением сингулярной сферической поверхности, которая окружает звезду на расстоянии  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g} = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$  далеко от её поверхности в космосе (см. выше). Внешняя метрика также

---

\* Жидкая звезда имеет одинаковую плотность  $\rho = \rho_0 = const$  по всему её объёму, так что её масса равна  $M = \frac{4}{3}\pi\rho_0 a^3$ . В долях массы Солнца это выражается в виде  $\bar{M} = \bar{\rho}_0 \bar{a}^3$ .

справедлива глубоко внутри звезды на сингулярной сферической поверхности крошечного радиуса  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  от центра звезды: на этой сферической поверхности в глубине звезды гравитационное поле звезды имеет пространственный разрыв, созданный её внешней метрикой.

Как было показано в §2.3, внешний пространственный разрыв в далёком космосе означает лишь разрыв кривизны пространства. На основании §2.3 можно показать, что это не приводит к аномалии по отношению к действующей силе гравитации.

Однако сейчас мы покажем, что сила гравитации имеет очень сильную аномалию на сингулярной сферической поверхности разрыва внутреннего пространства. Действительно, внутри звезды на гильбертовом радиусе  $r_g$  от её центра справедлива метрика внешнего пространства (а внутренняя метрика справедлива как внутри гильбертова радиуса, так и вне его). Поэтому все вычисления для внутренней сингулярной поверхности выполняются с внешней метрикой (метрикой точечной массы). И это несмотря на то, что данная сингулярная поверхность расположена глубоко внутри звезды вблизи её центра.

Согласно фундаментальному метрическому тензору внешней метрики звезды (1.1), физически наблюдаемый х.и.-вектор вектор силы гравитации  $F_i$  имеет вид (1.4). На сингулярной сферической поверхности гильбертова радиуса  $r = r_g$  глубоко внутри звезды наблюдаемая сила гравитации (1.4) достигает бесконечно большой величины

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \rightarrow -\infty, \quad (2.139)$$

т.е. гравитационное поле звезды имеет пространственный разрыв на этой поверхности.

Благодаря своей бесконечно большой величине сила гравитации там по определению достаточна для передачи необходимой кинетической энергии лёгким атомным ядрам звёздного вещества, чтобы начался процесс термоядерного синтеза. Энергия, выделяющаяся при термоядерном синтезе, — это та энергия, которую излучают звезды.

Сингулярная сферическая поверхность радиусом, равным гильбертову радиусу  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ , окружает геометрический центр каждой

звезды. Это означает, что в центре каждой звезды находится светящееся “внутреннее солнце”. Это “внутреннее солнце” — крошечное по сравнению с размером звезды. Например, гильбертов радиус Солнца составляет всего 2,9 км, а физический радиус Солнца равен 700 000 км. Таким образом, зона термоядерного синтеза — это не только поверхностный слой радиусом  $r_g$ , но и весь объём “внутреннего солнца”. Иными словами, “внутреннее солнце” радиуса  $r_g$  — это то место, где термоядерный синтез из водорода образует гелий, обеспечивая энергией светимость звезды. Далее энергия передается от “внутреннего солнца” звезды к её поверхности за счёт теплопроводности (обычный перенос тепла в жидкостях), а затем излучается с её поверхности в космос.

Поскольку “внутреннее солнце” звезды имеет радиус, равный гильбертовому радиусу звезды  $r_g$ , в дальнейшем мы будем называть его *светящимся гильбертовым ядром*, или просто — *гильбертовым ядром*.

Светимость звезды, светящей благодаря предложенному механизму звёздной энергии, зависит только от двух факторов: объёма гильбертова ядра  $V = \frac{4}{3}\pi r_g^3$ , в котором выделяется энергия, и плотности  $\rho_g$  звёздного вещества внутри него (которая может отличаться от плотности  $\rho_0$  основной массы звезды, см. объяснение ниже). В безразмерных характеристиках звёзд это

$$\bar{L} = \bar{\rho}_g \bar{r}_g^3 = \bar{\rho}_g \bar{M}^3. \quad (2.140)$$

Напомним, что предлагаемый механизм звёздной энергии не зависит от давления в центральной области звезды: действующая там сверхсильная гравитация (2.139) обеспечивает необходимые условия для термоядерного синтеза. Но производительность механизма зависит от плотности звёздного вещества в гильбертовом ядре.

Рассчитаем плотность гильбертова ядра так, чтобы предполагаемый механизм звёздной энергии удовлетворял наблюдаемому соотношению массы и светимости.

Будем исходить из фактов наблюдательной астрономии. Она показывает соотношение массы и светимости  $\bar{L} = \bar{M}^{2,6}$  для звёзд с массами от  $0,2M_\odot$  до  $0,5M_\odot$ , соотношение  $\bar{L} = \bar{M}^{4,5}$  для звёзд с массами от  $0,5M_\odot$  до  $2M_\odot$ ,  $\bar{L} = \bar{M}^{3,6}$  в диапазоне от  $2M_\odot$  до  $10M_\odot$ , и  $\bar{L} = \bar{M}$  для звёзд намного массивнее  $10M_\odot$ . См. таблицу 2.3.

Эти эмпирические данные наблюдательной астрономии согласуются с нашей теоретической формулой для светимости звёзд  $L$  (2.140), если звёздное вещество гильбертова ядра (в котором вырабатывается звёздная энергия) имеет плотность, как показано в таблице 2.4.

На основании функции  $\bar{\rho}_g = \bar{M}^y$  по таблице 2.4 мы можем узнать, насколько плотно гильбертово ядро звезды по сравнению с её основной массой (известной из астрономических наблюдений). Таким образом, мы вычисляем следующее соотношение для звёзд

$$\frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_0} = \frac{\bar{M}^y}{\bar{\rho}_0}. \quad (2.141)$$

Результаты расчётов приведены в таблице 2.5. На основании рассчитанного отношения  $\bar{\rho}_g/\bar{\rho}_0$ , показанного в таблице 2.5, мы приходим к следующему выводу. Светящееся гильбертово ядро звезды — её “внутреннее солнце” — может иметь плотность, отличную от плотности основной массы звезды. Это зависит от конкретного типа звёзд. Например, звёздное вещество гильбертова ядра гиганта или сверхгиганта на много порядков плотнее основного вещества этих звёзд. Гильбертово ядро звезды, похожей на Солнце, имеет примерно такую же плотность, как и сама звезда. Что касается карликовых звёзд, то гильбертово ядро такой звезды более разрежено, чем основное вещество звезды. Чем больше плотность карликовой звезды, тем меньше плотность её ядра по сравнению с плотностью всей звезды. У такой звезды, как белый карлик, гильбертово ядро на много порядков более разрежено, чем основное вещество звезды.

Соответственно возникает следующий вопрос. Все физические тела имеют массы, поэтому каждое тело должно иметь внутри себя ядро гильбертова радиуса. Такое ядро должны иметь не только звёзды, но и планеты и даже отдельные элементарные частицы. Но почему они не светят, как звёзды?

Ответ исходит из состояния того вещества, из которого состоят эти физические тела. Звёзды состоят из жидкого вещества, состоящего в основном из лёгких химических элементов, таких как водород и гелий. Поэтому в гильбертовом ядре каждой звезды возможен термоядерный синтез лёгких атомных ядер. Благодаря тому, что вещество является жидким, к его светящемуся гильбертовому

Наблюдаемая зависимость масса-светимость $\bar{L} = \bar{M}^x$	Шкала звёздных масс в долях массы Солнца $M_{\odot}$
$\bar{L} = \bar{M}^{2,6}$	$\bar{M} = 0,2 \dots 0,5$
$\bar{L} = \bar{M}^{4,5}$	$\bar{M} = 0,5 \dots 2$
$\bar{L} = \bar{M}^{3,6}$	$\bar{M} = 2 \dots 10$
$\bar{L} = \bar{M}$	$\bar{M} > 10$

Таблица 2.3: Наблюдаемая зависимость  
масса-светимость  $\bar{L} = \bar{M}^x$ .

Плотность гильбертова ядра $\bar{\rho}_g$	Шкала звёздных масс в долях массы Солнца $M_{\odot}$
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{0,4}$	$\bar{M} = 0,2 \dots 0,5$
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{1,5}$	$\bar{M} = 0,5 \dots 2$
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{0,6}$	$\bar{M} = 2 \dots 10$
$\bar{\rho}_g = \bar{M}^{-2}$	$\bar{M} > 10$

Таблица 2.4: Плотность вещества внутри гильбертова ядра.

Объект	Масса $\bar{M}$	Плотность $\bar{\rho}_0$	$\bar{\rho}_g/\bar{\rho}_0$
Бетельгейзе (красный сверхгигант)	20	$2,0 \times 10^{-8}$	$1,3 \times 10^9$
Ригель (белый сверхгигант)	17	$5,2 \times 10^{-5}$	$6,7 \times 10^7$
Юпитер (протозвезда)	$9,5 \times 10^{-4}$	0,9	0,069
Красные карлики	0,34	9	0,072
Коричневый карлик (Corot-Echo-3)	0,021	21	0,010
Белый карлик (Сириус В)	1	$1,3 \times 10^6$	$7,7 \times 10^{-7}$

Таблица 2.5: Отношение  $\bar{\rho}_g/\bar{\rho}_0$  для некоторых типичных звёзд.

ядру из других областей звезды доставляется всё больше и больше “ядерного топлива”, поддерживая тем самым горение внутри “ядерного котла” вплоть до момента, когда закончится всё ядерное топливо звезды. Другое дело — планеты. Они состоят в основном из тяжёлых элементов с незначительным содержанием водорода. Поэтому, как только “ядерный котёл” гильбертова ядра израсходу-

ет весь запас водородного топлива в центральной области планеты, он перестаёт вырабатывать энергию, но продолжает существовать в центре планеты, в латентном состоянии.

Астрономам известно, что энергия, излучаемая Юпитером, превышает солнечную энергию, поглощаемую всей поверхностью этой планеты. То же самое верно и для Сатурна. Это означает, согласно нашей теории, что гильбертово ядро каждой из этих планет всё ещё перерабатывает водород в гелий, тем самым высвобождая ядерную энергию.

Относительно отдельных элементарных частиц, таких как протоны, нейтроны и электроны: как известно, они стабильны и индифферентны в течение длительного времени, пока не взаимодействуют с другими частицами. Фактически это означает, что гильбертово ядро протона (а также нейтрона и электрона) не взаимодействует с основной массой частицы. Почему это происходит? Можно только догадываться, что либо вещество, находящееся внутри частиц, находится в сверхтвёрдом состоянии, либо между ядром и остальной массой существует слой очень сильного вакуума. С другой стороны, гильбертово ядро протона (и нейтрона) имеет крошечный радиус  $(r_g)_p = \frac{2Gm_p}{c^2} = 2,48 \times 10^{-52}$  см, а гильбертово ядро электрона имеет ещё меньший радиус  $(r_g)_e = \frac{2Gm_e}{c^2} = 1,35 \times 10^{-55}$  см. Как было сказано Альбертом Эйнштейном, геометрические законы (геометрия пространства-времени) общей теории относительности верны, вероятно, вплоть до масштабов элементарных частиц. В субъядерном масштабе, возможно, работает другая геометрия, утверждающая свои законы, отличные от законов общей теории относительности. Поэтому мы не можем сейчас сказать что-то определённое о физических условиях и процессах внутри элементарных частиц.

Но что касается обычного мира звёзд и планет, то экспериментальная физика и наблюдательная астрономия показывают, что теория Эйнштейна верна и работает в этих масштабах с высокой точностью. Поэтому следует принимать во внимание все наши выводы о внутреннем строении звёзд и о механизме генерации энергии в звёздах.

Конкретные детали предполагаемого механизма звёздной энергии — это особая тема, выходящая за рамки этой книги (которая в основном посвящена внутреннему строению звёзд).

## 2.7 Характеристики пространства внутри жидкой звезды

Чтобы понять в общих чертах описание обычной звезды, вспомним, что в §2.1 мы повторили вывод истинной метрики пространства жидкой сферы, сделанный Л. Борисовой [11, 12], следуя “историческому пути”, как это сделал Шварцшильд. А именно — мы взяли сферически-симметричную метрику в общем виде, затем применили частные условия характеризующие сферу, заполненную идеальной жидкостью. Отличием от вывода Шварцшильда было то, что мы не вводили никаких искусственных ограничений. Следуя этим путём, мы получили наблюдаемые характеристики пространства в неявном виде. Используя эти результаты, мы вывели метрику пространства жидкой сферы в окончательном виде.

Теперь мы выразим наблюдаемые характеристики пространства жидкой сферы в явном виде, т.е. через полученные нами компоненты фундаментального метрического тензора метрики жидкой сферы. Итак, истинная метрика пространства жидкой сферы, выведенная Л. Борисовой [11, 12], имеет вид (1.8)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.142)$$

Мы вычисляем х.и.-характеристики пространства согласно их определениям, данным в §1.3, и соответствующим компонентам фундаментального метрического тензора метрики (2.142).

Х.и.-метрический тензор  $h_{ik}$  метрики (2.142) имеет следующие ненулевые компоненты

$$h_{11} = \frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad h_{22} = r^2, \quad h_{33} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.143)$$

$$h^{11} = 1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}, \quad h^{22} = \frac{1}{r^2}, \quad h^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}, \quad (2.144)$$

а детерминант х.и.-метрического тензора  $h_{ik}$ , а также пространственные производные от логарифма его детерминанта, не равные

нулю, имеют вид

$$h = \det \|h_{ik}\| = \frac{r^4 \sin^2 \theta}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad (2.145)$$

$$\frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial r} = \frac{2}{r} + \frac{r_g r}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}}, \quad \frac{* \partial \ln \sqrt{h}}{\partial \theta} = \cot \theta. \quad (2.146)$$

Итак, после вычислений согласно хронометрически инвариантному формализму (см. §1.3) получаем следующее. Компоненты х.и.-вектора гравитационно-инерциальной силы, действующей в пространстве, имеет вид

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{a^3} \frac{r}{\left(3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (2.147)$$

$$F^1 = -\frac{c^2 r_g}{a^3} \frac{r \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (2.148)$$

где  $r < a$ , так как всё это — внутри сферы. Следовательно, там  $F_1 < 0$ , т.е. это — сила притяжения.

Ненулевые х.и.-символы Кристоффеля имеют вид

$$\Delta_{11}^1 = \frac{r_g r}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad \Delta_{22}^1 = -\frac{\Delta_{33}^1}{\sin^2 \theta} = -r \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right), \quad (2.149)$$

$$\Delta_{12}^2 = \Delta_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta. \quad (2.150)$$

Ненулевые компоненты х.и.-тензора трёхмерной наблюдаемой кривизны  $C_{iklj}$  и его свёртки  $C_{ik}$  имеют вид

$$C_{1212} = \frac{C_{1313}}{\sin^2 \theta} = -\frac{r_g r^2}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad C_{2323} = -\frac{r_g r^4}{a^3} \sin^2 \theta, \quad (2.151)$$

$$C_{11} = -\frac{2r_g}{a^3} \frac{1}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}, \quad C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2 \theta} = -\frac{2r_g r^2}{a^3}. \quad (2.152)$$

Имея полученные физически наблюдаемые х.и.-характеристики внутреннего пространства жидкой сферы, теперь у нас есть всё, что нужно для рассмотрения уравнений Эйнштейна во внутреннем поле обычной невращающейся звезды.

## 2.8 Уравнения Эйнштейна во внутреннем поле жидкой звезды

Рассмотрим уравнения поля Эйнштейна во внутреннем пространстве жидкой сферы, метрика которого имеет вид (2.142). Как известно, тензор энергии-импульса идеальной жидкости имеет следующий общий вид (2.4)

$$T^{\alpha\beta} = \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) U^\alpha U^\beta - \frac{p}{c^2} g^{\alpha\beta}, \quad (2.153)$$

где  $\rho_0 = const$  плотность жидкости,  $p$  давление, тогда как  $U^\alpha$  четырёхмерная скорость течения жидкости относительно наблюдателя (это — единичный четырёхмерный вектор, поэтому  $U_\alpha U^\alpha = 1$ ). Х.и.-проекции тензора энергии-импульса имеют вид (2.21)

$$\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \rho_0, \quad J^i = \frac{cT_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad U^{ik} = c^2 T^{ik} = p h^{ik}, \quad (2.154)$$

где  $\rho$  наблюдаемая плотность массы жидкости,  $J^i$  наблюдаемая плотность импульса жидкости, тогда как  $U^{ik}$  наблюдаемый тензор напряжений в жидкости.

С помощью этих формул и с учётом того, что пространство рассматриваемой жидкой сферы не вращается и не деформируется ( $A_{ik} = 0$ ,  $D_{ik} = 0$ ), х.и.-уравнения Эйнштейна (1.92–1.94) принимают следующий вид

$$*\nabla_j F^j - \frac{1}{c^2} F_j F^j = -\frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 + U), \quad (2.155)$$

$$J^i = 0, \quad (2.156)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (*\nabla_i F_k + *\nabla_k F_i) - \frac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \\ = \frac{\kappa}{2} (\rho_0 c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}), \end{aligned} \quad (2.157)$$

где  $*\nabla_i$  символ х.и.-дифференцирования,  $U_{ik} = p h_{ik}$  и  $U = 3p$ .

Подставим в уравнения поля Эйнштейна формулы для  $F_i$ ,  $C_{ik}$  и  $h_{ik}$ , вычисленные для метрики (2.142). Получаем, что ненулевыми остаются только два уравнения

$$\frac{3c^2 r_g}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = \frac{\varkappa}{2} (\rho_0 c^2 + 3p), \quad (2.158)$$

$$\frac{3c^2 r_g}{a^3} \frac{2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = \frac{\varkappa}{2} (\rho_0 c^2 - p). \quad (2.159)$$

Умножая (2.159) на 3, затем суммируя произведение с (2.158), мы получаем

$$\varkappa \rho_0 c^2 = \frac{3c^2 r_g}{a^3}. \quad (2.160)$$

Подставляя этот результат обратно в (2.159), получаем *уравнение состояния\** для жидкого вещества обычных звёзд

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\varkappa \rho_0 r^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\varkappa \rho_0 a^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\varkappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\varkappa \rho_0 r^2}{3}}}. \quad (2.161)$$

Эта формула полностью совпадает с формулой для давления  $p$  (2.130), полученной нами в результате следования путём Шварцшильда.

Эта формула для давления  $p$  также может быть получена из уравнений сохранения (2.26–2.27). Поскольку пространство метрики (2.142) не деформируется (что означает  $h_{ik} \neq f(t)$  и, следовательно,  $D_{ik} = 0$ ), х.и.-скалярное уравнение сохранения (2.26) обращается в нуль. Остаётся только х.и.-векторное уравнение сохранения (2.27). Оно принимает форму

$${}^* \nabla_i (p h^{ik}) - \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (2.162)$$

При этом  ${}^* \nabla_i h^{ik} = 0$  всегда справедливо для  $h^{ik}$ , как и  $\nabla_\sigma g^{\alpha\sigma} = 0$  для фундаментального метрического тензора. Поэтому, а также в

\* Формула, связывающая давление и плотность внутри среды.

силу того, что х.и.-производная по пространственным координатам совпадает с обычной пространственной производной в случае, когда пространство не вращается, остальные уравнения сохранения (2.162) имеют вид

$$h^{ik} \frac{\partial p}{\partial x^i} - \left( \rho_0 + \frac{p}{c^2} \right) F^k = 0. \quad (2.163)$$

Подставляя формулы для  $h^{11}$  и  $F^1$ , полученные нами для метрики пространства внутри жидкой сферы (2.142), преобразуем (2.163) в дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{\rho_0 c^2 + p} = -\frac{r_g}{a^3} \frac{r dr}{\left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (2.164)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$d \ln(\rho_0 c^2 + p) = -d \ln \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right), \quad (2.165)$$

который легко интегрировать. После интегрирования имеем

$$p + \rho_0 c^2 = \frac{Q}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad (2.166)$$

где постоянная интегрирования  $Q$  получается из очевидного условия  $p = 0$  на поверхности звезды (где  $r = a$ ). Тогда

$$Q = 2\rho_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} \quad (2.167)$$

и, таким образом, мы получаем

$$p + \rho_0 c^2 = 2\rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (2.168)$$

Легко видеть, что это решение приводит к той же формуле для  $p$ , что и (2.161), которую мы получили из уравнений Эйнштейна.

## 2.9 Метрика внутреннего пространства вращающейся жидкой звезды

Рассмотрим метрику обычной жидкой звезды (2.142) с той лишь заменой, что звезда вращается с угловой скоростью  $\omega$  вдоль своей экваториальной оси — оси  $\phi$  в сферических координатах  $r, \theta, \phi$ . В этом случае невращающаяся метрика (2.142) принимает вид

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \\
 & - \omega r^2 \sin^2 \theta \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right) dt d\phi - \\
 & - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.169)
 \end{aligned}$$

Согласно этой метрике (2.169), линейная скорость вращения пространства внутри звезды равна

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = \omega r^2 \sin^2 \theta. \quad (2.170)$$

Напомним, что это — метрика пространства внутри обычных вращающихся звёзд — звёзд, гильбертов радиус  $r_g$  которых много меньше их физического радиуса  $a$ .

## 2.10 Стационарное электромагнитное поле вращающейся жидкой звезды

Реальная звезда имеет своё собственное электромагнитное поле. Поэтому мы должны ввести электромагнитное поле в теорию жидких звёзд. Электродинамика в терминах хронометрически инвариантного формализма была представлена в главе 3 нашей книги [18]. Сейчас мы следуем нашим вычислениям оттуда, применяя их к нашей теории жидких звёзд.

Итак, как известно из общеквариантной формулировки электродинамики [20], тензор энергии-импульса произвольного электромагнитного поля имеет вид

$$T_{\text{em}}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi c^2} \left( -F^{\alpha\cdot\sigma} F^{\beta\sigma} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\sigma} F^{\mu\sigma} \right), \quad (2.171)$$

где  $F_{\alpha\beta}$  тензор электромагнитного поля, известный также как тензор Максвелла. Тензор поля  $F_{\alpha\beta}$  представляет собой ротор четырёхмерного электромагнитного потенциала  $A^\alpha$

$$F_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha A_\beta - \nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (2.172)$$

Физически наблюдаемыми х.и.-проекциями четырёхмерного электромагнитного потенциала  $A^\alpha$  являются скалярный  $\varphi$  и векторный  $q^i$  электромагнитные потенциалы

$$\varphi = \frac{A_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad q^i = A^i. \quad (2.173)$$

Тензор электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta}$  (2.171) имеет следующие физически наблюдаемые проекции

$$\rho_{\text{em}} = \frac{T_{00}}{g_{00}} = \frac{E_i E^i + H_{*i} H^{*i}}{8\pi c^2}, \quad (2.174)$$

$$J_{\text{em}}^i = \frac{c T_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{1}{4\pi c} \varepsilon^{ikm} E_k H_{*m}, \quad (2.175)$$

$$U_{\text{em}}^{ik} = c^2 T^{ik} = \rho_{\text{em}} c^2 h^{ik} - \frac{1}{4\pi} (E^i E^k + H^{*i} H^{*k}), \quad (2.176)$$

где  $E^i$  трёхмерный х.и.-вектор электрической напряжённости поля,  $H^{*i}$  трёхмерный х.и.-псевдовектор магнитной напряжённости поля, тогда как  $\varepsilon^{imn}$  полностью антисимметричный единичный трёхмерный х.и.-псевдотензор [18]

$$\left. \begin{aligned} E^{*ik} &= -\varepsilon^{ikn} E_n, & E_n &= \frac{* \partial \varphi}{\partial x^n} + \frac{1}{c} \frac{* \partial q_n}{\partial t} - \frac{\varphi}{c^2} F_n \\ H^{*i} &= \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}, & H_{mn} &= \frac{* \partial q_m}{\partial x^n} - \frac{* \partial q_n}{\partial x^m} - \frac{2\varphi}{c} A_{mn} \end{aligned} \right\}. \quad (2.177)$$

Как видно из определений (2.177), х.и.-электрическая напряжённость и х.и.-магнитная напряжённость зависят не только от потенциалов электромагнитного поля  $\varphi$  и  $q^i$ , но и от характеристик пространства, содержащего это поле. Это — гравитационно-инерциальная сила  $F_i$ , действующая в пространстве, и угловая скорость вращения пространства  $A_{ik}$ .

Будем полагать, что скалярный и векторный потенциалы электромагнитного поля постоянны и распределены однородно, т.е. электромагнитное поле является стационарным и безвихревым

$$\left. \begin{aligned} \frac{* \partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \frac{* \partial \varphi}{\partial x^i} = 0 \\ \frac{* \partial q_i}{\partial t} = 0, \quad q_{ik} = \frac{* \partial q_i}{\partial x^k} - \frac{* \partial q_k}{\partial x^i} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (2.178)$$

В этом случае мы имеем

$$\left. \begin{aligned} E^i = -\frac{\varphi}{c^2} F^i, \quad E_i = -\frac{\varphi}{c^2} F_i \\ H^{*i} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}, \quad H_{*i} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega_{*i} \end{aligned} \right\}, \quad (2.179)$$

где  $\Omega^{*i}$  трёхмерный х.и.-псевдовектор угловой скорости вращения пространства, определяемый как

$$\Omega^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} A_{mn}, \quad \Omega_{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{imn} A^{mn}. \quad (2.180)$$

Как видно из формул (2.179), в стационарном безвихревом электромагнитном поле обычной звезды электрическая напряжённость  $E^i$  определяется скалярным электромагнитным потенциалом  $\varphi$  поля и гравитационно-инерциальной силой  $F^i$ , действующей в пространстве, а магнитная напряжённость поля  $H^{*i}$  обусловлена скалярным электромагнитным потенциалом  $\varphi$  и угловой скоростью  $\Omega^{*i}$  вращения пространства. Чем сильнее гравитационное поле вращающейся звезды, тем сильнее её электрическое поле. Чем быстрее звезда вращается, тем сильнее её магнитное поле.

Используя эти формулы для  $E^i$  и  $H^{*i}$  (2.179), получаем х.и.-компоненты (2.174–2.176) тензора электромагнитного поля

$$\rho_{em} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \left( \frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right), \quad (2.181)$$

$$J_{em}^i = \frac{\varphi^2}{2\pi c^4} \varepsilon^{ikm} F_k \Omega_{*m}, \quad (2.182)$$

$$U_{em}^{ik} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left( \frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) h^{ik} - \frac{\varphi^2}{\pi c^2} \left( \frac{F^i F^k}{4c^2} + \Omega^{*i} \Omega^{*k} \right), \quad (2.183)$$

где след тензора напряжений поля  $U_{em} = h_{ik} U_{em}^{ik}$  равен

$$U_{em} = \frac{\varphi^2}{2\pi c^2} \left( \frac{F_j F^j}{4c^2} + \Omega_{*j} \Omega^{*j} \right) = \rho_{em} c^2. \quad (2.184)$$

Поэтому, и так как  $H^{*i} = -\frac{2\varphi}{c} \Omega^{*i}$  (2.179), стационарно вращающаяся обычная звезда является *постоянным магнитом*.

## 2.11 Уравнения Максвелла в электромагнитном поле вращающейся жидкой звезды

Как известно, электромагнитное поле описывается уравнениями Максвелла. В общековариантной форме они имеют вид [20]

$$\nabla_\sigma F^{\mu\sigma} = \frac{4\pi}{c} j^\mu, \quad \nabla_\sigma F^{*\mu\sigma} = 0, \quad (2.185)$$

где первое уравнение даёт группу I, а второе даёт группу II. Здесь  $F^{*\mu\sigma} = \varepsilon^{\mu\sigma\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$  псевдотензор, дуальный тензору электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta}$ , тогда как  $j^\mu$  четырёхмерный вектор тока в данном поле. В х.и.-форме уравнения Максвелла (2.185) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} - \frac{1}{c} \left( \frac{* \partial E^i}{\partial t} + D E^i \right) &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (2.186)$$

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} - \frac{1}{c} \left( \frac{* \partial H^{*i}}{\partial t} + D H^{*i} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II,} \quad (2.187)$$

подробности см. в главе 3 книги [18]. Здесь  $E^{*ik} = -\varepsilon^{ikn} E_k$  псевдотензор, дуальный вектору электрической напряжённости  $E_i$  поля,  $H^{*i} = \frac{1}{2} \varepsilon^{imn} H_{mn}$  псевдовектор, дуальный тензору магнитной напряжённости  $H_{mn}$ , тогда как  $D = h^{ik} D_{ik}$  скорость деформации пространства. См. эти определения в формуле (2.177).

Физически наблюдаемые плотность заряда  $\rho$  и вектор тока  $j^i$  являются х.и.-проекциями четырёхмерного вектора тока  $j^\mu$

$$\rho = \frac{1}{c} \frac{j_0}{\sqrt{g_{00}}}, \quad j^i = h_\mu^i j^\mu. \quad (2.188)$$

Поскольку рассматриваемое пространство стационарно (метрика жидкой сферы не зависит от времени) и электромагнитное поле стационарно, то тензор деформации пространства  $D_{ik}$  и производные по времени от  $E^i$  и  $H^{*i}$  обращаются в нуль. В этом случае х.и.-уравнения Максвелла (2.186–2.187) упрощаются

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_j E^j - \frac{1}{c} H^{ik} A_{ik} &= 4\pi\rho \\ * \nabla_k H^{ik} - \frac{1}{c^2} F_k H^{ik} &= \frac{4\pi}{c} j^i \end{aligned} \right\} \text{I,} \quad (2.189)$$

$$\left. \begin{aligned} * \nabla_i H^{*i} - \frac{1}{c} E^{*ik} A_{ik} &= 0 \\ * \nabla_k E^{*ik} - \frac{1}{c^2} F_k E^{*ik} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{II.} \quad (2.190)$$

Рассмотренные уравнения Максвелла характеризуют электромагнитное поле, возникающее за счёт зарядов и токов — источников поля, определяющих правые члены уравнений группы I. Источники электромагнитного поля (заряды и токи) определяются плотностью заряда  $\rho$  и вектором тока  $j^i$ , являющимися х.и.-проекциями четырёхмерного вектора тока  $j^\mu$  (2.188). Если бы правая часть уравнений была равна нулю, то это было бы электромагнитное поле без источников (существующее независимо от источников).

Источники электромагнитного поля (плотность заряда  $\rho$  и вектор тока  $j^i$ ) должны удовлетворять общековариантному закону сохранения электрического заряда (уравнению непрерывности)

$$\nabla_\sigma j^\sigma = 0, \quad (2.191)$$

который означает, что четырёхмерный вектор тока  $j^\sigma$  и, следовательно, его х.и.-проекции  $\rho$  и  $j^i$  (источники электромагнитного поля) сохраняются в четырёхмерном объёме поля.

Четырёхмерный электромагнитный потенциал  $A^\sigma$  должен удовлетворять общековариантному условию Лоренца

$$\nabla_\sigma A^\sigma = 0, \quad (2.192)$$

которое означает, что четырёхмерный потенциал поля  $A^\sigma$  и, следовательно, его х.и.-проекции  $\varphi$  и  $q^i$ , являющиеся х.и.-скалярным и

х.и.-векторным потенциалами поля, сохраняются в четырёхмерном объёме поля.

В произвольном электромагнитном поле общековариантные закон сохранения (2.191) и условие Лоренца (2.192) имеют следующую х.и.-формулировку

$$\frac{*d\rho}{dt} + \rho D + *\tilde{\nabla}_i j^i - \frac{1}{c^2} F_i j^i = 0, \quad (2.193)$$

$$\frac{1}{c} \frac{*d\varphi}{dt} + \frac{\varphi}{c} D + *\tilde{\nabla}_i q^i - \frac{1}{c^2} F_i q^i = 0, \quad (2.194)$$

где мы обозначаем  $*\tilde{\nabla}_i = *\nabla_i - \frac{1}{c^2} F_i$ . См. главу 3 книги [18].

Мы рассматриваем стационарное безвихревое электромагнитное поле. Это значит, что условия (2.178) должны выполняться как для потенциалов поля  $\varphi$  и  $q^i$ , так и для источников поля  $\rho$  и  $j^i$ . Легко видеть, в этом случае и поскольку мы рассматриваем пространство, которое не деформируется ( $D_{ik} = 0$ ), х.и.-закон сохранения (2.193) и х.и.-условие Лоренца (2.194) удовлетворяются как тождества.

## 2.12 Заключение

Все теоретические выводы об источнике звёздной энергии и о внутреннем строении звёзд получены здесь в рамках нашей модели жидких звёзд, основанной на представлении о звёздах как пространственно-временных объектах согласно общей теории относительности. Ниже — наиболее важные из этих выводов:

1. Поле каждой звезды имеет внешний пространственной разрыв, который окружает звезду сферической поверхностью. “Пузырь” внешнего пространственного разрыва в поле каждой звезды имеет радиус

$$r_{br} = \sqrt{\frac{3}{\kappa\rho_0}} = \sqrt{\frac{a^3}{r_g}}, \quad (2.195)$$

на много порядков больший физического радиуса звезды  $a$ . Наблюдаемая трёхмерная кривизна пространства  $C_{iklj}$  и четырёхмерная риманова кривизна  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  имеют на этой поверхности общий пространственный разрыв. Внешний пространственный разрыв препятствует формированию близлежащего

вещества на этой орбите в планету. Внешний пространственный разрыв в поле Солнца расположен в пределах пояса астероидов, вблизи максимальной концентрации астероидов;

2. Поле каждой звезды имеет разрыв во внутреннем пространстве, глубоко внутри физического тела звезды близко к её центру, на поверхности гильбертова радиуса

$$r_g = \frac{2GM}{c^2} \quad (2.196)$$

от её центра. Это означает, что там имеется маленькое ядро, отделённое сингулярной поверхностью от основной массы звезды. На поверхности этого ядра сила гравитации достигает бесконечно большой величины. Сверхсильной гравитации по определению достаточно для передачи необходимой кинетической энергии лёгким атомным ядрам звёздного вещества, чтобы начался термоядерный синтез. Таким образом высвобождается ядерная энергия. Жидкое “ядерное топливо” доставляется из других областей звезды в ядро, поддерживая тем самым горение внутри этого “ядерного котла”;

3. Каждая звезда имеет массу. Следовательно, светящееся ядро гильбертова радиуса  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$  — “внутреннее солнце” — существует в центре каждой звезды. Мы называем его *гильбертовым ядром*. Это — место, где термоядерный синтез производит гелий из водорода, таким образом обеспечивая светимость звёзд. Затем энергия передаётся от “внутреннего солнца” звезды к её поверхности за счёт теплопроводности (обычный перенос тепла в жидкостях), чтобы затем излучаться в космос;
4. Гильбертово ядро имеет крошечный размер по сравнению с размером самой звезды. Например, для Солнца гильбертов радиус равен  $r_g = 2,9$  км;
5. Наблюдаемое соотношение масса-светимость звёзд выполняется, если плотность гильбертова ядра зависит от конкретного типа звезды. Гильбертово ядро гиганта или сверхгиганта должно быть на много порядков плотнее основного вещества этих звёзд. Гильбертово ядро звезды, подобной Солнцу, должно быть примерно такой же по плотности, как и сама звезда. В звезде-карлике гильбертово ядро должно быть более разре-

- женным, чем основное вещество звезды (ядро белого карлика должно быть крайне разрежено);
6. Каждая планета имеет массу. Следовательно, гильбертово ядро находится в центре каждой планеты. Но планеты состоят в основном из тяжёлых элементов с небольшим содержанием водорода. Как только “ядерный котёл” гильбертова ядра планеты израсходует весь запас водородного топлива в центральной области планеты, он перестаёт вырабатывать энергию, но продолжает существовать в центре планеты, в латентном состоянии;
  7. При рассмотрении метрики внутреннего пространства жидкой звезды мы шли историческим путём, как это делал Шварцшильд при введении метрики. А именно, — даже когда мы вводили полную форму метрики внутреннего пространства жидкой сферы (которая содержит сингулярности), мы использовали обозначения Шварцшильда. Это обозначение происходит от общей формы записи сферически-симметричной метрики и, таким образом, содержит коэффициенты  $e^\nu$  и  $e^\lambda$ , которые являются функциями  $r$  и  $t$ . Это — общий метод записи любой сферически-симметричной метрики. Когда мы вычисляем физически наблюдаемые характеристики такого метрического пространства, мы получаем их в форме, также выраженной через неизвестные  $e^\nu$  и  $e^\lambda$ . Таким образом, мы получаем физически наблюдаемые характеристики пространства в неполном виде, что требует дальнейшего вычисления коэффициентов  $e^\nu$  и  $e^\lambda$ . Это создаёт огромные трудности при решении частных задач в рамках метрики такого пространства. Поэтому мы ввели метрику внутреннего пространства жидкой сферы в окончательном виде, где коэффициенты  $e^\nu$  и  $e^\lambda$  выражены через основные характеристики сферы, такие как её физический радиус и гильбертов радиус, а также через радиальную координату  $r$  и время  $t$ . В результате мы получили все компоненты фундаментального метрического тензора в явном виде, без неизвестных коэффициентов. Это было предметом §2.7 и §2.8. Поэтому, как только мы (или кто-то другой) будем дальше решать задачи для метрики внутреннего пространства обычной жидкой звезды, мы изначально будем иметь формулы для всех физически наблюдаемых характеристик её внутрен-

- него пространства;
8. Большинство звёзд вращается. Скорее всего все звёзды вращаются, но многие из них вращаются медленно, так что доплеровское расщепление спектральных линий, обусловленное вращением, не может быть зарегистрировано современными методами спектроскопии. В любом случае, если мы рассматриваем жидкую звезду, обладающую электромагнитным полем, мы должны рассматривать метрику внутреннего пространства вращающейся жидкой сферы;
  9. Мы также показали, что электрическая составляющая электромагнитного поля звезды непосредственно зависит от её гравитационного поля, магнитная — от её вращения, а также что вращающаяся обычная звезда является *постоянным магнитом*. Чем сильнее гравитационное поле звезды, тем сильнее электрическая напряжённость её электромагнитного поля. Чем быстрее вращается звезда, тем сильнее магнитная напряжённость её электромагнитного поля.
-

### 3.1 Условие второй космической скорости для звезды

С поверхности любой звезды постоянно извергается поток частиц звёздного вещества. Часть потока состоит из настолько быстрых частиц, что они навсегда покидают гравитационное поле звезды и уходят во внешний космос, создавая таким образом звёздный ветер.\* С точки зрения нашей математической теории жидких звёзд это означает, что частицы поверхностного слоя звезды движутся быстрее второй космической скорости для звезды.

Почему частицы звёздного вещества покидают поверхность звезды? Можно ли уподобить этот процесс кипячению воды в чайнике или это что-то совсем другое? Поиск ответа на этот вопрос и составляет нашу исследовательскую задачу в этой главе.

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны изучить движение частиц звёздного вещества внутри звезды. Для этого сначала найдём формулу для второй космической скорости, выраженную через компоненты метрики пространства жидкой звезды. Затем выведем уравнения движения частиц звёздного вещества внутри звезды. Таким образом, мы получим физические условия, при которых частицы поверхностного слоя звезды движутся быстрее второй космической скорости. После этого мы сможем решать уравнения движения частиц звёздного вещества.

Вторая космическая скорость  $v_{II}$ , представляет собой скорость, с которой частица может навсегда “покинуть” гравитационное поле массивного тела.†

---

\*Звёзды Вольфа-Райе отличаются от всех обычных звёзд чрезвычайно мощным звёздным ветром: этот поток настолько мощный, что звезда Вольфа-Райе теряет значительную часть своей массы со звёздным ветром.

†Первая космическая скорость  $v_I$ , известная также как орбитальная скорость, позволяет частице вращаться вокруг массивного тела, не падая на его поверхность.

Предположим, что частицы звёздного вещества движутся радиально от центра звезды к её поверхности. Пусть частицы достигнут поверхности, а затем навсегда покинут звезду во внешний космос, образуя таким образом звёздный ветер. Поэтому формулу для скорости частиц звёздного вещества, которая выражается через вторую космическую скорость для звезды, мы называем *условием второй космической скорости*.

Для сферически-симметричного тела с массой  $M$  вторая космическая скорость на расстоянии  $r$  от его центра равна

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (3.1)$$

Эта формула исходит из метрики точечной массы (1.1),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.2)$$

где  $r_g = \frac{2GM}{c^2}$ , тогда как  $M$  масса тела (источника поля).

Как показано в главе 2, поле любой жидкой звезды имеет две области. Они описываются двумя разными метриками. Метрика жидкой сферы действительна от центра звезды ( $r = 0$ ) до её поверхности ( $r = a$ ). Метрика точечной массы действительна в космосе выше поверхности звезды. То есть, частицы звёздного вещества движутся внутри звезды по траекториям, определяемым метрикой жидкой сферы. Если частицы покидают звезду, они движутся в космосе по траекториям, определяемым метрикой точечной массы.

Таким образом, скорость частиц звёздного вещества, летящих с поверхности звезды во внешний космос, получается как решение уравнений движения массовой частицы согласно метрике точечной массы. Выраженное через вторую космическую скорость, это — условие второй космической скорости для звезды.

Мы выводим эту формулу как решение х.и.-уравнений неизотропных геодезических [18, 19]

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k &= 0 \\ \frac{d(mv^i)}{d\tau} + 2m \left( D_k^i + A_{k.}^i \right) v^k - m F^i + m \Delta_{nk}^i v^n v^k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

которые представляют собой уравнения наблюдаемого движения массовой частицы, движущейся с наблюдаемой скоростью  $v^i$ . Эти уравнения получаются как х.и.-проекции общековариантных уравнений неизотропных геодезических. Подробнее см. [18, 19].

Мы решаем уравнения (3.3) для частицы звёздного вещества, движущейся вдоль радиального направления  $r$ . Поэтому

$$v^1 = \frac{dr}{d\tau} \neq 0, \quad v^2 = v^3 = 0. \quad (3.4)$$

Чтобы решить уравнения (3.3), нам нужно найти физически наблюдаемые характеристики пространства метрики точечной массы (3.2). Как видно из метрики (3.2), это пространство не вращается и не деформируется ( $A_{ik} = 0$ ,  $D_{ik} = 0$ ). Отличны от нуля только гравитационно-инерциальная сила  $F_i$  и символы Кристоффеля  $\Delta_{nk}^i$ . Таким образом, для метрики (3.2) мы получаем

$$F_1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad F^1 = -\frac{c^2 r_g}{2r^2}, \quad (3.5)$$

$$h_{11} = \frac{1}{h^{11}} = 1 - \frac{r_g}{r}, \quad h_{22} = \frac{1}{h^{22}} = r^2, \quad h_{33} = \frac{1}{h^{33}} = r^2 \sin^2 \theta, \quad (3.6)$$

$$\Delta_{11}^1 = -\frac{r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad \Delta_{22}^1 = \frac{\Delta_{33}^1}{\sin^2 \theta} = -r \left(1 - \frac{r_g}{r}\right), \quad (3.7)$$

$$\Delta_{12}^2 = \Delta_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Delta_{33}^2 = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Delta_{23}^3 = \cot \theta. \quad (3.8)$$

Отсюда получаем, что х.и.-уравнения движения (3.3) в пространстве метрики точечной массы имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{m} \frac{dm}{d\tau} &= -\frac{r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \frac{dr}{d\tau} \\ \frac{1}{m} \frac{d}{d\tau} \left( m \frac{dr}{d\tau} \right) - \frac{r_g}{2r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \frac{c^2 r_g}{2r^2} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.9)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)}}}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{d\tau}. \quad (3.10)$$

Здесь, обозначив релятивистскую массу частицы на поверхности ( $r = a$ ) звезды как  $m_{(0)}$  (это — “стартовая масса” частицы при её выходе из звезды), и обозначив наблюдаемую скорость частицы при выходе из звезды как  $\dot{r}_0$ , мы имеем

$$m = m_{(0)} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{r}}}, \quad m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}_0^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g^3}{a^3}\right)}}}. \quad (3.11)$$

Приступим к решению х.и.-уравнений движения (3.9). Подставив скалярное уравнение в векторное, получаем векторное уравнение движения вдоль радиальной координаты  $r$

$$\ddot{r} - \frac{r_g}{r^2} \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{c^2 r_g}{2r^2} = 0. \quad (3.12)$$

Обозначим  $\dot{r} = y$ . Тогда

$$\ddot{r} = yy', \quad y' = \frac{dy}{dr}, \quad (3.13)$$

и уравнение (3.12) принимает вид

$$yy' - \frac{r_g}{r^2} \frac{y^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{c^2 r_g}{2r^2} = 0. \quad (3.14)$$

Полагая  $u(r) = y^2$ , сводим его к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению

$$u' - \frac{2r_g}{r^2} \frac{u}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{c^2 r_g}{r^2} = 0. \quad (3.15)$$

Это уравнение имеет следующее точное решение

$$u = e^{-F} \left( u_0 + \int_r^a g(r) e^F dr \right), \quad u_0 = y_0^2 = \dot{r}_0^2, \quad (3.16)$$

где входящие в него функции имеют вид

$$F(r) = \int_r^a f(r) dr, \quad f(r) = -\frac{2r_g}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}}, \quad g(r) = \frac{c^2 r_g}{r^2}. \quad (3.17)$$

Интегрируя функцию  $f(r)$ , получаем

$$F(r) = \ln \left( \frac{1 - \frac{r_g}{a}}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)^2, \quad e^F = \left( \frac{1 - \frac{r_g}{a}}{1 - \frac{r_g}{r}} \right)^2, \quad (3.18)$$

$$\int_r^a \frac{c^2 r_g \left(1 - \frac{r_g}{a}\right)^2 dr}{r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2} = c^2 \left(1 - \frac{r_g}{a}\right) \left(1 - \frac{1 - \frac{r_g}{a}}{1 - \frac{r_g}{r}}\right). \quad (3.19)$$

Подставляя (3.17–3.19) в (3.16) и пренебрегая высшими степенями члена  $\frac{r_g}{a}$  (они ничтожны для обычных звёзд), получаем

$$i^2 = i_0^2 \left(1 + \frac{2r_g}{a} - \frac{2r_g}{r}\right) + c^2 \left(\frac{r_g}{a} - \frac{r_g}{r}\right). \quad (3.20)$$

Отсюда мы получаем формулу для лучевой скорости частицы звёздного вещества, покидающей звезду со звёздным ветром. Поскольку  $v_{II}$  (3.1) на поверхности звезды ( $r = a$ ) принимает вид

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r}} = c \sqrt{\frac{r_g}{r}} = c \sqrt{\frac{r_g}{a}} \quad (3.21)$$

мы получаем лучевую скорость частицы  $\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\tau} = c \sqrt{\frac{i_0^2 + v_{II}^2}{c^2} - \frac{r_g}{r} + \frac{2i_0^2}{c^2} \left(\frac{v_{II}^2}{c^2} - \frac{c^2 r_g}{r}\right)}. \quad (3.22)$$

Итак, эта формула и есть условие второй космической скорости, которое мы искали. Если  $i_0 = 0$ , то уравнение (3.22) демонстрирует совершенно очевидное условие

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{v_{II}^2 - \frac{c^2 r_g}{r}} < v_{II}. \quad (3.23)$$

Согласно этому условию частица звёздного вещества не может покинуть гравитационное поле звезды, если её стартовая скорость на поверхности звезды равна нулю. Поэтому при дальнейшем рассмотрении звёздного ветра во всех уравнениях теории всегда предполагается  $i_0 \neq 0$ .

Получим окончательное упрощение условия второй космической скорости (3.22). Сравним численные значения членов под корнем. Обозначим последний член под корнем как

$$q = \frac{2\dot{r}_0^2}{c^2} \left( \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} - \frac{c^2 r_g}{r} \right). \quad (3.24)$$

Для Солнца, типичной обычной звезды, имеем:  $v_{\parallel} = 617$  км/сек,  $r_g = 2,9$  км,  $\dot{r}_0 = 750$  км/сек\* и  $a = 7,0 \times 10^5$  км. Поскольку  $q = 0$  при  $r = a$ , примем  $r > a$  как для звёздного ветра. Тогда мы получаем

$$\frac{\dot{r}_0^2 + v_{\parallel}^2}{c^2} \approx 10^{-5}, \quad \frac{r_g}{r} < 4,1 \times 10^{-6}, \quad q < 5,3 \times 10^{-11}. \quad (3.25)$$

Для типичной звезды класса Вольфа-Райе (см. таблицу 1.1) имеем:  $v_{\parallel} = 982$  км/сек,  $r_g = 150$  км,  $\dot{r}_0 = 2200$  км/сек и  $a = 1,4 \times 10^7$  км. Поэтому для типичной звезды Вольфа-Райе мы получаем

$$\frac{\dot{r}_0^2 + v_{\parallel}^2}{c^2} \approx 6,4 \times 10^{-5}, \quad \frac{r_g}{r} < 1,1 \times 10^{-5}, \quad q < 1,2 \times 10^{-9}. \quad (3.26)$$

Член  $q$  настолько мал, что им можно пренебречь. Поэтому формула для условия второй космической скорости имеет вид

$$\frac{dr}{d\tau} = c \sqrt{\frac{\dot{r}_0^2}{c^2} + \frac{v_{\parallel}^2}{c^2} - \frac{r_g}{r}}. \quad (3.27)$$

Как следует из этой итоговой формулы, на поверхности звезды ( $r = a$ ) скорость частицы звёздного вещества равна  $\dot{r}_0$ .

### 3.2 Светоподобные частицы внутри жидкой звезды

Рассмотрим теперь, как ведут себя частицы звёздного вещества и частицы света внутри звезды (звёзды наполнены не только веществом, но и светом). Сначала рассмотрим светоподобные (безмассовые) частицы. Такие частицы движутся по изотропным геодезическим линиям.

---

\*  $\dot{r}_0 \approx 750$  км/сек типично для частиц быстрой компоненты солнечного ветра, состав которой тот же, что и фотосферы. Напротив, медленная составляющая солнечного ветра имеет состав, близкий к составу короны. Её частицы летят от Солнца со скоростью около 400 км/сек.

Х.и.-уравнения изотропных геодезических вид [18, 19]

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_i c^i + \frac{\omega}{c^2} D_{ik} c^i c^k &= 0 \\ \frac{d(\omega c^i)}{d\tau} + 2\omega (D_k^i + A_k^i) c^k - \omega F^i + \omega \Delta_{nk}^i c^n c^k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.28)$$

и являются уравнениями наблюдаемого движения светоподобной частицы (фотона с частотой  $\omega$ ), движущейся с наблюдаемой скоростью света  $c^i$ . Эти х.и.-уравнения выводятся как наблюдаемые проекции общековариантных уравнений изотропных геодезических.

Как и ранее, мы полагаем, что звезда не вращается и не деформируется ( $A_{ik} = 0, D_{ik} = 0$ ). Также мы рассматриваем фотон, который движется строго радиально (в направлении  $x^1 = r$ ) от центра звезды к её поверхности. В этом случае х.и.-уравнения изотропных геодезических (3.28) внутри обычной звезды принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_1 c^1 &= 0 \\ \frac{d(\omega c^1)}{d\tau} - \omega F^1 + \omega \Delta_{11}^1 c^1 c^1 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (3.29)$$

где наблюдаемая (световая) скорость фотона равна  $c^1 = \frac{dr}{d\tau}$ .

Рассмотрим х.и.-скалярное уравнение геодезических (3.29). Подставляя  $F_1$  (2.147) метрики жидкой сферы, имеем

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} = - \frac{r_g}{a^3} \frac{r}{\left( 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} \frac{dr}{d\tau}, \quad (3.30)$$

или, в виде, который легко интегрируется

$$\begin{aligned} d \ln \omega &= - \frac{d \left| 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}{\left| 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right|} = \\ &= d \ln \frac{1}{\left| 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Мы изучаем только фотоны внутри звезды, т.е. ищем решение для интервала  $r_g \leq r \leq a$ . После интегрирования получаем

$$\omega = \frac{B}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad B = \text{const.} \quad (3.32)$$

Предположим, что фотоны исходят из гильбертовой поверхности звезды ( $r_0 = r_g$ ). Тогда

$$B = \omega_0 \left( 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g^3}{a^3}} \right), \quad (3.33)$$

где  $\omega_0$  есть начальное значение частоты фотона (на гильбертовой поверхности внутри звезды). Поскольку  $r_g \ll a$  для обычных звёзд, мы пренебрегаем членами высшего порядка от  $\frac{r_g}{a}$ . Тогда решение х.и.-скалярного уравнения геодезических (3.32), показывающее частоту фотона, принимает вид

$$\omega = \frac{\omega_0 \left( 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1 \right)}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}. \quad (3.34)$$

Теперь рассмотрим х.и.-векторное уравнение геодезических (3.29). При радиальном движении фотона оно имеет вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Delta_{11}^1 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - F^1 = 0. \quad (3.35)$$

Обозначим  $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{d\tau^2}$  и  $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$ , затем подставим  $\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau}$  (3.30),  $\Delta_{11}^1$  (2.149) и  $F^1$  (2.148). Таким образом, х.и.-векторное уравнение геодезических (3.35) преобразуется в нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка по  $r$

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{\left( 3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} + \\ + \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} + \frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

В таком виде уравнение просто нерешаемо. Поэтому упростим его формулой для  $\dot{r}^2$ , взятой из очевидного соотношения  $h_{ik} c^i c^k = c^2$ , которое в данном случае имеет вид

$$\frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} = c^2. \quad (3.37)$$

В результате исходное уравнение (3.36) принимает вид

$$\ddot{r} + \frac{c^2 r_g r}{a^3} = 0. \quad (3.38)$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}} = \frac{v_{II}}{a} = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}, \quad (3.39)$$

которая, как видите, зависит от второй космической скорости  $v_{II}$  (3.21), рассчитанной для звезды.

В общем случае частота  $\Omega$  (3.39) зависит только от массы  $M$  и радиуса  $a$ , которые являются интегральными характеристиками звезды. Поэтому мы называем её *собственной частотой звезды*.

В таблице 4.1 приведены численные значения собственной частоты  $\Omega$ , вычисленные нами для типичных представителей известных классов звёзд согласно нашей теории жидких звёзд.

Собственная частота  $\Omega$  звезды достигает предельно большой величины  $\Omega_{\max} = \frac{c}{a}$  на  $r_g = a$ . Это — случай гравитационных коллапсаров (чёрных дыр), который применим и ко Вселенной в целом. По наблюдательным оценкам, радиус Вселенной равен  $a = 1,3 \times 10^{28}$  см и равен её гильбертовому радиусу  $r_g$ . Таким образом, Вселенная представляет собой огромный гравитационный коллапсар. Вычисляя собственную частоту  $\Omega$  для Вселенной, мы получаем

$$\Omega_{\max} = \frac{c}{a} = 2,3 \times 10^{-18} \text{ сек}^{-1}, \quad (3.40)$$

что соответствует числовому значению постоянной Хаббла, которое равно  $H = \frac{\dot{c}}{a} = (2,3 \pm 0,3) \times 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$ . В этом случае интегральная масса Вселенной должна быть, согласно (3.39),

$$M = \frac{\Omega^2 a^3}{2G} = 8,8 \times 10^{55} \text{ грамм}, \quad (3.41)$$

Объект	Масса грамм	Радиус $a$ , см	Собств. частота $\Omega$ , сек <sup>-1</sup>
Звёзды Вольфа-Райе	$1,0 \times 10^{35}$	$1,4 \times 10^{12}$	$7,0 \times 10^{-5}$
Красный сверхгигант*	$4,0 \times 10^{34}$	$7,0 \times 10^{13}$	$1,6 \times 10^{-7}$
Белый сверхгигант <sup>†</sup>	$3,4 \times 10^{34}$	$4,8 \times 10^{12}$	$6,4 \times 10^{-6}$
Солнце	$2,0 \times 10^{33}$	$7,0 \times 10^{10}$	$8,8 \times 10^{-4}$
Юпитер (протозвезда)	$1,9 \times 10^{30}$	$7,1 \times 10^9$	$8,4 \times 10^{-4}$
Красные карлики	$6,7 \times 10^{32}$	$2,3 \times 10^{10}$	$2,7 \times 10^{-3}$
Коричневый карлик <sup>‡</sup>	$4,1 \times 10^{31}$	$7,0 \times 10^9$	$7,4 \times 10^{-2}$
Белый карлик <sup>§</sup>	$2,0 \times 10^{33}$	$6,4 \times 10^8$	1,0
Вселенная	$8,8 \times 10^{55}$	$1,3 \times 10^{28}$	$2,3 \times 10^{-18}$

\*Бетельгейзе. † Ригель. ‡Corot-Ехо-3. §Сириус В.

Таблица 4.1: Собственная частота  $\Omega$  для типичных звёзд известных классов, а также для Вселенной.

что совпадает с наблюдаемым диапазоном средней плотности вещества во Вселенной, который, согласно астрономическим оценкам, составляет от  $10^{-28}$  до  $10^{-31}$  грамм/см<sup>3</sup>.

Вернёмся теперь к х.и.-векторному уравнению движения светоподобных частиц внутри жидкой звёзды в его финальной форме (3.38). Это уравнение решается как

$$r = B_1 \cos \left( \sqrt{\frac{r_g}{a}} \frac{c\tau}{a} \right) + B_2 \sin \left( \sqrt{\frac{r_g}{a}} \frac{c\tau}{a} \right), \quad (3.42)$$

где  $B_1$  и  $B_2$  постоянные интегрирования. Полагая  $r$  и  $\dot{r}$  в начальный момент физически наблюдаемого времени  $\tau_0 = 0$  равными  $r_0 = r_g$  и  $\dot{r}_0 = c$ , мы получаем константы интегрирования

$$B_1 = r_g, \quad B_2 = a \sqrt{\frac{a}{r_g}}. \quad (3.43)$$

В результате мы получаем окончательное решение для радиальной координаты  $r$  светоподобной частицы, движущейся радиально внутри звезды от её центра к поверхности

$$r = r_g \cos \Omega\tau + a \sqrt{\frac{a}{r_g}} \sin \Omega\tau, \quad \Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}}, \quad (3.44)$$

которое по сути является уравнением гармонических колебаний  $r = A_1 \cos \Omega \tau + A_2 \sin \Omega \tau$ . Дифференцируя решение (3.44), мы получаем скорость колебаний фотона

$$\dot{r} = c \cos \Omega \tau - \frac{cr_g}{a} \sin \Omega \tau, \quad \Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}}. \quad (3.45)$$

Как видно из полученного решения (3.44), вся светоподобная материя каждой звезды колеблется с частотой  $\Omega$  (3.39), которая является собственной частотой этой конкретной звезды и определяется её массой и радиусом. Это колебание происходит с двумя амплитудами:

- а) Амплитуда  $A_1 = r_g$  совпадает с радиусом внутреннего пространственного разрыва поля звезды на поверхности её гильбертова ядра, где выделяется звёздная энергия;
- б) Амплитуда  $A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$  совпадает с внешним пространственным разрывом поля звезды (подробнее см. главу 2). Внешний пространственный разрыв находится вне звезды, во внешнем космосе. Для Солнца ( $a = 7,0 \times 10^{10}$  см,  $r_g = 2,9 \times 10^5$  см) мы получаем  $A_2 = 3,4 \times 10^{13}$  см = 2,3 а.е., что является расстоянием от Солнца до максимальной концентрации астероидов в поясе астероидов. Это означает, что светоподобная звёздная материя каждой звезды колеблется с одной и той же частотой как на сферической поверхности внешнего пространственного разрыва в поле этой конкретной звезды, в далёком космосе, так и на поверхности гильбертова ядра глубоко внутри этой звезды.

Упомянутое колебание светоподобной материи каждой звезды обусловлено гравитационным полем этой конкретной звезды (создаваемым её массой  $M$ ).

Как это колебание влияет на частоту фотона? Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим полученное решение для частоты фотона  $\omega$  (3.34) в двух предельных случаях, соответствующих двум амплитудам колебаний:  $r = A_1 = r_g$  и  $r = A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$ . Таким образом, частота принимает следующие численные значения

$$r = A_1 = r_g, \quad \omega = \omega_0 \frac{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1} = \omega_0, \quad (3.46)$$

$$r = A_2 = \frac{a^2}{r_g}, \quad \omega = \omega_0 \frac{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}}}. \quad (3.47)$$

Как видно из этих формул, это колебание не меняет частоту звёздного излучения вблизи гильбертова ядра (в центре звезды), но влияет на частоту звёздного излучения на больших расстояниях от гильбертова ядра.

### 3.3 Частицы звёздного вещества внутри жидкой звезды

Такие частицы движутся по неизотропным геодезическим. Х.и.-уравнения неизотропных геодезических [18, 19] имеют вид (3.3)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_i v^i + \frac{m}{c^2} D_{ik} v^i v^k &= 0 \\ \frac{d(mv^j)}{d\tau} + 2m(D_k^j + A_k^j)v^k - mF^j + m\Delta_{nk}^j v^n v^k &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.48)$$

Будем считать, что обычная звезда представляет собой жидкую сферу, которая не вращается и не деформируется ( $A_{ik} = 0$ ,  $D_{ik} = 0$ ). Для частицы звёздного вещества, движущейся внутри звезды радиально от центра к поверхности, наблюдаемая скорость равна  $v^1 = \frac{dr}{d\tau}$ , тогда как  $v^2 = v^3 = 0$ . В этом случае х.и.-уравнения неизотропных геодезических (3.48) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dm}{d\tau} - \frac{m}{c^2} F_1 v^1 &= 0 \\ \frac{d(mv^1)}{d\tau} - mF^1 + m\Delta_{11}^1 v^1 v^1 &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (3.49)$$

Они имеют ту же структуру, что и х.и.-уравнения изотропных геодезических (3.29) и решаются одинаковым способом. Но массовые частицы не удовлетворяют условию скорости света  $h_{ik} c^i c^k = c^2$  (3.37), которое мы использовали для уравнений изотропных геодезических. Поэтому х.и.-уравнения неизотропных геодезических (3.49) будут иметь другое решение, чем то, которое мы получили для х.и.-уравнений изотропных геодезических (3.29).

Подставим в х.и.-скалярное уравнение геодезических для частицы звёздного вещества (3.49) выражение для  $F_1$  (2.147), которое

мы получили для метрики жидкой сферы. Таким образом, мы получаем это уравнение в виде

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{d\tau} = -\frac{r_g}{a^3} \frac{r}{\left(3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}} \frac{dr}{d\tau}. \quad (3.50)$$

Это уравнение можно переписать в следующем виде, который легко проинтегрировать

$$\begin{aligned} d \ln m &= -\frac{d \left| 3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}{\left| 3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}} \right|} = \\ &= d \ln \frac{1}{\left| 3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}} \right|}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

При  $r_g \leq r \leq a$  (мы изучаем только частицы внутри звезды) после интегрирования получаем

$$m = \frac{B}{3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g r^2}{a^3}}}, \quad B = \text{const}. \quad (3.52)$$

Пусть частицы стартуют с гильбертовой поверхности ( $r_0 = r_g$ ) рядом с центром звезды. Тогда

$$B = m_{(0)} \left( 3\sqrt{1-\frac{r_g}{a}} - \sqrt{1-\frac{r_g^3}{a^3}} \right), \quad (3.53)$$

где

$$m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2 \left(1-\frac{r_g^3}{a^3}\right)}}} \quad (3.54)$$

— начальное значение релятивистской массы частицы на гильбертовой поверхности звезды. Поскольку  $r_g \ll a$  для обычных звёзд, мы пренебрегаем членами высшего порядка в  $\frac{r_g}{a}$ . С учётом этого и полученного выражения для константы интегрирования  $B$  (3.53)

решение х.и.-скалярного уравнения геодезических, то есть решение (3.52), принимает следующий вид

$$m = \frac{m_{(0)} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1 \right)}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = \frac{m_0 \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1 \right)}{\left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}}, \quad (3.55)$$

где мы имеем

$$m_{(0)} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}} \quad (3.56)$$

в рамках упомянутого выше приближения.

Теперь рассмотрим х.и.-векторное уравнение геодезических из (3.49). При нашем предположении, что частица звёздного вещества движется радиально от центра звезды к её поверхности, это уравнение имеет вид

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \frac{1}{m} \frac{dm}{d\tau} \frac{dr}{d\tau} + \Delta_{11}^1 \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 - F^1 = 0. \quad (3.57)$$

С подставленными  $\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau}$  (3.30),  $\Delta_{11}^1$  (2.149),  $F^1$  (2.148) и с обозначениями  $\ddot{r} = \frac{d^2 r}{d\tau^2}$  и  $\dot{r} = \frac{dr}{d\tau}$  это уравнение преобразуется в нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно  $r$

$$\ddot{r} - \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{\left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} \right) \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} + \frac{r_g r}{a^3} \frac{\dot{r}^2}{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}} + \frac{c^2 r_g r}{a^3} \frac{\sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}} = 0. \quad (3.58)$$

Оно идентично уравнению (3.36), полученному нами для фотона, и тоже нерешаемо. Поэтому, очевидно, его надо упростить. Для

упрощения этого уравнения выразим  $\dot{r}^2$  из очевидного соотношения  $h_{11}\dot{r} = \dot{r}^2$ , которое принимает вид

$$c^2 \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right) \left(1 - \frac{m_0^2}{m^2}\right) = \dot{r}^2, \quad (3.59)$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2 \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right)}}}. \quad (3.60)$$

Из (3.55) следует, что

$$\frac{m_0}{m} = \frac{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}\right) \sqrt{1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}}}{3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1}. \quad (3.61)$$

Поэтому из (3.59) получаем

$$\dot{r}^2 = c^2 \left(1 - \frac{r_g r^2}{a^3}\right) \left[1 - \frac{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r_g r^2}{a^3}}\right)^2 \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right)}{\left(3\sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - 1\right)^2}\right]. \quad (3.62)$$

Подставляя эту формулу для  $\dot{r}^2$  в исходное дифференциальное уравнение (3.58) и пренебрегая членами высшего порядка от  $\frac{r_g}{a}$ , мы приводим х.и.-векторное уравнение геодезических (3.58) к следующему виду, в котором оно вполне решается

$$\ddot{r} + \frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g r}{2a^3} = 0. \quad (3.63)$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\Omega = \sqrt{\frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}{2a^3}}. \quad (3.64)$$

Это решение касается частиц звёздного вещества. Как легко видеть, эта формула преобразуется в формулу для частоты колебаний звёздных фотонов  $\Omega$  (3.39) при предельном условии  $\dot{r} = c$ .

Х.и.-векторное уравнение геодезических (3.63) решается как

$$r = Q_1 \cos \Omega \tau + Q_2 \sin \Omega \tau, \quad (3.65)$$

где постоянные интегрирования  $Q_1$  и  $Q_2$  получаются из условий  $r_0 = r_g$  и  $\dot{r}_0 = 0$  в начальный момент времени  $\tau_0 = 0$ . Мы получаем

$$Q_1 = r_g, \quad Q_2 = \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}}. \quad (3.66)$$

Поэтому окончательное решение для  $r$  имеет вид

$$r = r_g \cos \Omega \tau + \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}} \sin \Omega \tau, \quad (3.67)$$

который представляет собой уравнение гармонических колебаний  $r = A_1 \cos \Omega \tau + A_2 \sin \Omega \tau$ . В итоге, дифференцируя (3.67), мы получаем радиальную скорость частицы звёздного вещества во внутреннем пространстве обычной звезды

$$\dot{r} = -\sqrt{\frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g^3}{2a^3}} \sin \Omega \tau + \dot{r}_0 \cos \Omega \tau. \quad (3.68)$$

Полученное решение (3.67) показывает, что частицы жидкого вещества каждой звезды колеблются с частотой  $\Omega$  (3.64), которая зависит от массы и радиуса этой конкретной звезды, а также от начальной скорости частиц. Это колебание происходит с двумя амплитудами:

- а) Амплитуда  $A_1 = r_g$  такая же, как и у светоподобной звёздной материи (см. §3.2). Это означает, что частицы жидкого вещества каждой звезды колеблются с той же амплитудой, что и светоподобная материя этой конкретной звезды. Эта амплитуда совпадает с радиусом внутреннего пространственного разрыва поля звезды на поверхности её гильбертова ядра, где выделяется звёздная энергия;
- б) Амплитуда

$$A_2 = \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}} \quad (3.69)$$

зависит от начальной скорости  $\dot{r}_0$  частиц звёздного вещества. Если  $\dot{r}_0 = c$ , то  $A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$  совпадает с амплитудой колебания светоподобной звёздной материи (см. §3.2). Согласно (3.69) начальная скорость тех частиц, амплитуда колебания которых достигает поверхности звезды ( $A_2 = a$ ), равна

$$\dot{r}_0 = \frac{c \sqrt{r_g}}{\sqrt{2a - r_g}} = \frac{v_{II}}{\sqrt{2 - \frac{r_g}{a}}} \approx \frac{v_{II}}{\sqrt{2}}, \quad v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{a}}, \quad (3.70)$$

где  $v_{II}$  (3.21) вторая космическая скорость для звезды, с которой частицы, что рядом со звездой, навсегда покидают её гравитационное поле. Таким образом, по условию  $A_2 \geq a$  в (3.69) мы получаем скорость  $\dot{r}_0$ , которая необходима частице звёздного вещества, чтобы навсегда улететь с поверхности звезды в космос. Она отличается от второй космической скорости  $v_{II}$  для частицы, не связанной с веществом звезды

$$\dot{r}_0 \geq \sqrt{\frac{GM}{a}}. \quad (3.71)$$

Выразим формулу для собственной частоты звезды  $\Omega$  (3.64) через орбитальную скорость  $v_1$  частицы звёздного вещества

$$\Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{2a}} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} = \frac{v_{II}}{a \sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} = \frac{v_1}{a} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}. \quad (3.72)$$

Используя эту формулу, мы выражаем  $r$  (3.67) в виде

$$r = r_g \cos \Omega \tau + \frac{\dot{r}_0 a}{v_1 \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}} \sin \Omega \tau, \quad (3.73)$$

т.е. в виде  $r = A_1 \cos \Omega \tau + A_2 \sin \Omega \tau$ . Итак, мы имеем

$$A_1 = r_g, \quad A_2 = \frac{\dot{r}_0 a}{v_1 \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}}. \quad (3.74)$$

Таким образом,  $\dot{r}$  (3.68) превращается в

$$\dot{r} = -\frac{r_g v_1}{a} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} \sin \Omega \tau + \dot{r}_0 \cos \Omega \tau. \quad (3.75)$$

Рассмотрим теперь амплитуду  $A_2$  (3.74) для некоторых частных случаев, когда она имеет разные численные значения:

1. Если  $\dot{r}_0 = 0$ , мы имеем  $A_2 = 0$  согласно определению  $A_2$  (3.74). Следовательно, частицы звёздного вещества колеблются с амплитудой  $r_g$ . Другими словами, если  $\dot{r}_0 = 0$ , частицы не могут достигнуть поверхности звезды и, следовательно, покинуть звезду;
2. Если  $\dot{r}_0 = v_1$ , частицы также не могут покинуть звезду. Это потому, что они колеблются с амплитудой также меньше физического радиуса звезды

$$A_2 = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} < a; \quad (3.76)$$

3. Если  $\dot{r}_0 = v_{II}$ , то частицы покидают звезду. Это потому, что в случае  $\dot{r}_0 = v_{II}$  мы имеем

$$A_2 = \frac{a \sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{v_{II}^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_{II}^2}{2c^2}\right) a \sqrt{2} \approx a \sqrt{2} > a; \quad (3.77)$$

4. Если  $A_2 = a$ , то амплитуда равна физическому радиусу звезды. Тогда из определения  $A_2$  (3.74) получаем, что

$$\dot{r}_0 = \frac{v_1}{\sqrt{1 + \frac{v_1^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_1^2}{2c^2}\right) v_1 < v_1, \quad (3.78)$$

т.е. частицы движутся немного медленнее, чем орбитальная скорость звезды. Это означает, что если амплитуда равна физическому радиусу звезды ( $A_2 = a$ ), то частицы могут выпрыгивать с поверхности звезды, но при этом не выходить на её орбиту (они будут всегда падать обратно на звезду).

Таким образом, новая математическая теория жидких звёзд даёт прочное теоретическое обоснование звёздного ветра, испускаемого звездой, как ветра, состоящего из двух компонент. Одна из этих компонент немного медленнее, чем орбитальная скорость звезды, а другая — быстрее второй космической скорости. Этот вывод соответствует данным наблюдений. Так, например, солнечный ветер состоит из двух компонент. Медленный солнечный ветер

распространяется со скоростью около 400 км/сек, что меньше орбитальной скорости Солнца, равной  $v_1 = 440$  км/сек. Быстрый солнечный ветер распространяется со скоростью около 750 км/сек, что превышает вторую космическую скорость Солнца  $v_{II} = 617$  км/сек.

### 3.4 Заключение

Подытожим основные выводы, которые мы получили о происхождении звёздного ветра. Выводы следующие:

1. Светоподобная материя каждой звезды колеблется с определённой частотой

$$\Omega = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{r_g}{a}} = \frac{v_{II}}{a} = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}, \quad (3.79)$$

характеризующей эту конкретную звезду. Это означает, что каждая звезда имеет свою характерную частоту  $\Omega$  в соответствии с её массой  $M$  и радиусом  $a$ . Поэтому мы называем её *собственной частотой* звезды;

2. Это колебание происходит с двумя амплитудами. Амплитуда  $A_1 = r_g$  совпадает с радиусом гильбертова ядра звезды, на поверхности которого выделяется звёздная энергия. Другая амплитуда  $A_2 = \sqrt{a^3/r_g}$  совпадает с радиусом пространственного разрыва в поле звезды, находящегося во внешнем космосе. Для Солнца  $A_2 = 3,4 \times 10^{13}$  см = 2,3 а.е. совпадает с максимальной концентрацией астероидов в поясе астероидов;
3. Это — общее колебание всего светоподобного вещества звезды. Оно происходит из-за наличия у звезды гравитационного поля, источником которого является её масса  $M$ . Другими словами, это колебание — собственное “дыхание” звезды;
4. Частицы жидкого вещества каждой звезды колеблются с двумя амплитудами на определённой частоте

$$\Omega = \sqrt{\frac{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}{2a^3}} = \frac{v_{II}}{a\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}} = \frac{v_1}{c} \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}, \quad (3.80)$$

которая определяется массой и радиусом этой конкретной звезды, а также зависит от начальной скорости  $\dot{r}_0$  этих частиц. Эта частота может быть выражена через вторую косми-

ческую скорость  $v_{II}$  и орбитальную скорость  $v_I$ , рассчитанные для звезды;

5. Амплитуда их колебаний  $A_1 = r_g$  такая же, как и у светоподобного вещества (фотонов) звезды. Другая амплитуда  $A_2$  зависит от начальной скорости частиц

$$A_2 = \frac{\dot{r}_0 a \sqrt{2a}}{\sqrt{(c^2 + \dot{r}_0^2) r_g}} = \frac{\dot{r}_0 a}{v_I \sqrt{1 + \frac{\dot{r}_0^2}{c^2}}}; \quad (3.81)$$

6. Звёзды излучают свет (поток фотонов) и извергают потоки частиц звёздного вещества (звёздный ветер) не в силу особых физических условий, а автоматически. Трёхмерное уравнение движения частиц (как фотонов, так и частиц звёздного вещества), движущихся радиально от центра жидкой звезды к её поверхности, представляет собой уравнение гармонических свободных колебаний

$$\ddot{r} + \Omega^2 r = 0, \quad \Omega^2 = -\frac{2F_1}{r} = \frac{c^2 r_g}{a^3}, \quad (3.82)$$

где  $F_1 = -\frac{c^2 r_g r}{2a^3}$  есть линеаризованная форма (в смысле  $r_g \ll a$ ) силы гравитации, действующей внутри любой жидкой звезды. Это — ньютоновская гравитационная сила, пропорциональная расстоянию, которая является причиной упомянутых общих колебаний как светоподобной звёздной материи, так и звёздного вещества. Как только амплитуда колебаний превышает физический радиус звезды, частицы вылетают из звезды в космос. Следовательно, причиной как излучения звёзд, так и звёздного ветра является внутреннее строение тел звёзд, представляющих собой жидкие сферы в состоянии невесомости в космосе;

7. Согласно этой теории, звёздный ветер, испускаемый любой звездой, состоит из двух компонент: медленного звёздного ветра и быстрого звёздного ветра. Частицы, амплитуда колебаний которых достигает поверхности звезды ( $A_2 = a$ ), имеют начальную скорость

$$\dot{r}_0 = \frac{v_I}{\sqrt{1 + \frac{v_I^2}{c^2}}} \simeq \left(1 - \frac{v_I^2}{2c^2}\right) v_I < v_I, \quad (3.83)$$

которая не превышает орбитальной скорости звезды  $v_1$ . Частицы, скорость которых равна второй космической скорости звезды ( $\dot{r}_0 = v_{II}$ ), имеют амплитуду колебаний

$$A_2 = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \frac{v_{II}^2}{c^2}}} \approx \left(1 - \frac{v_{II}^2}{2c^2}\right) a\sqrt{2} \approx a\sqrt{2} > a. \quad (3.84)$$

Это означает, что медленный звёздный ветер состоит из частиц, амплитуда колебаний которых находится в диапазоне  $a \leq A_2 < a\sqrt{2}$ . Эти частицы покидают поверхность звезды, но не навсегда. Они всегда падают обратно на звезду. Быстрый звёздный ветер состоит из частиц, амплитуда колебаний которых равна  $A_2 \geq a\sqrt{2}$ . Они навсегда покидают гравитационное поле звезды во внешний космос. Этот теоретический результат согласуется с данными наблюдений: солнечный ветер делится на медленный солнечный ветер, движущийся со скоростью  $\sim 400$  км/сек (медленнее, чем  $v_{1\odot} = 440$  км/сек) и быстрый солнечный ветер, движущийся со скоростью  $\sim 750$  км/сек (быстрее, чем  $v_{II\odot} = 617$  км/сек).

---

### 4.1 Невращающиеся жидкие коллапсары

Теперь мы собираемся изучить условие коллапса для невращающейся сферы, состоящей из идеальной жидкости, т.е. сколлапсировавшую жидкую звезду без вращения (в терминах нашей модели жидких звёзд). На первый взгляд эта постановка задачи звучит бессмысленно: идеальная жидкость несжимаема, следовательно, такое жидкое тело не может быть сжато. Да, было бы бессмысленно, если бы коллапс считали процессом сжатия жидкого космического тела. Мы так не делаем: мы не обсуждаем космогонию. Мы просто рассматриваем жидкий коллапсар как уже существующий объект. Таким образом, эта задача сводится к рассмотрению физических условий, а не эволюционного сжатия жидкого космического тела.

Космическое тело является гравитационным коллапсаром, если параметры его поля на его физической поверхности соответствуют условию гравитационного коллапса. А именно — гравитационное поле настолько сильно на поверхности тела, что световые сигналы не могут выйти из тела во внешний космос. С точки зрения общей теории относительности это означает, что физически наблюдаемое время останавливается на этой поверхности.

Согласно теории хронометрических инвариантов физически наблюдаемый интервал времени  $d\tau$  (1.30) формулируется через гравитационный потенциал  $w$  и линейную скорость вращения пространства  $v_i$  в следующем виде

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2} v_i dx^i. \quad (4.1)$$

Поэтому общее условие гравитационного коллапса состоит из двух членов

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i = 0. \quad (4.2)$$

В пространстве без вращения (где  $v_i = 0$ ) общее условие гравитационного коллапса упрощается

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = 0, \quad (4.3)$$

или просто

$$g_{00} = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right)^2 = 0. \quad (4.4)$$

Таким образом, невращающийся космический объект является коллапсаром, если трёхмерный гравитационный потенциал  $w$  на его поверхности принимает значение

$$w = c^2. \quad (4.5)$$

Рассмотрим условие коллапса для невращающейся звезды, состоящей из идеальной жидкости. Согласно вышесказанному, условие коллапса в этом случае имеет вид  $g_{00} = 0$ . Как видно из метрики пространства невращающейся жидкой звезды (2.76)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.6)$$

которая в терминах гильбертова радиуса  $r_g$  имеет вид (2.78)

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right)^2 c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.7)$$

условие коллапса ( $g_{00} = 0$ ) в этом случае имеет вид

$$3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} = 0, \quad (4.8)$$

или, что то же самое

$$3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} = 0. \quad (4.9)$$

Таким образом, мы получаем радиальную координату  $r$ , на которой невращающаяся жидкая звезда радиуса  $a$  переходит в состояние гравитационного коллапса

$$r_c = \sqrt{9a^2 - \frac{8a^3}{r_g}}. \quad (4.10)$$

Поскольку мы имеем в виду реальные космические объекты, численное значение  $r_c$  должно быть реальным (равно как  $a$  и  $r_g$ ). Этому требованию удовлетворяет следующее очевидное условие

$$a \leq 1,125 r_g. \quad (4.11)$$

Если это условие не выполняется ( $a \geq 1,125 r_g$ ), то невращающееся жидкое тело (звезда) не может находиться в состоянии гравитационного коллапса.

Общее условие коллапса (4.11) включает особое условие  $a = r_g$ . Учитывая этот частный случай сколлапсировавшей невращающейся жидкой звезды, мы видим, что физический радиус  $a$  поверхности звезды, гильбертов радиус  $r_g$  и радиус пространственного разрыва  $r_{br} = \sqrt{a^3/r_g}$  в поле звезды совпадают

$$r_c = r_{br} = r_g = a. \quad (4.12)$$

Полученное условие коллапса  $a = r_g$  (4.12) является всего лишь частным случаем общего условия коллапса (4.11). Общее условие коллапса (4.11) включает в себя три частных случая, касающихся положения физической поверхности сколлапсировавшей жидкой звезды:

1. Сколлапсировавшая жидкая звезда больше гильбертова радиуса, рассчитанного для звезды ( $a > r_g$ ), но меньше  $1,125 r_g$ ;
2. Поверхность сколлапсировавшей жидкой звезды совпадает с её гильбертовым радиусом ( $a = r_g$ );
3. Сколлапсировавшая жидкая звезда полностью находится под своим гильбертовым радиусом ( $a < r_g$ ).

Очевидно, что  $r_c$  является мнимым для  $r_g \ll a$ , поэтому состояние гравитационного коллапса для такой звезды невозможно. Например, рассматривая Солнце ( $a = 7 \times 10^7$  см,  $M = 2 \times 10^{33}$  грамм,  $r_g = 3 \times 10^5$  см), мы видим, что радиус коллапса  $r_c$  (4.10) принимает

мнимое численное значение. То же самое верно и для других обычных звёзд, от сверхгигантов до белых карликов. Следовательно, *обычные звёзды не могут коллапсировать*.

Фактически, конкретное условие коллапса  $r_c = r_{br} = r_g = a$  (4.12) формулирует радиус коллапса  $r_c$  следующим образом\*

$$r_c = a = \sqrt{\frac{3}{\kappa\rho_0}} = \frac{4,0 \times 10^{13}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ см.} \quad (4.13)$$

Например, если сколлапсировавшая жидкая сфера состояла бы из обычной воды ( $\rho_0 = 1,0$  грамм/см<sup>3</sup>), то её радиус был бы равен  $r_c = 4,0 \times 10^{13}$  см = 3,1 а.е., т.е. находился бы в поясе астероидов (астероиды расположены примерно от 2,1 а.е. до 4,3 а.е. от Солнца).

Ещё один пример: чтобы коллапсар был размером с нейтронную звезду или пульсар радиусом  $a = (8-16) \times 10^5$  см = 8–16 км, это жидкое тело должно иметь  $\rho_0 = 2,5 \times 10^{15} - 6,3 \times 10^{14}$  грамм/см<sup>3</sup> согласно полученной формуле для  $r_c$  (4.13).

Так, далее мы можем вычислить массу невращающегося жидкого коллапсара, исходя из формул  $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$  и  $a = r_c = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$  (4.13). Получаем следующие зависимости

$$M = \frac{4\pi a}{\kappa} = 6,8 \times 10^{27} a \text{ грамм,} \quad (4.14)$$

$$M = \frac{4\sqrt{3}\pi}{\kappa^{3/2}\sqrt{\rho_0}} = \frac{2,7 \times 10^{41}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ грамм,} \quad (4.15)$$

которые мы называем *соотношение масса-радиус* и *соотношение масса-плотность* для невращающихся жидких коллапсаров.

Так, если сколлапсировавшая жидкая сфера имеет размеры нейтронной звёзды или пульсара, т.е.  $a = (8-16) \times 10^5$  см = 8–16 км, то её масса теоретически должна быть равной  $M = (5,4-11) \times 10^{33}$  грамм, т.е. 2,7–5,5 массы Солнца.

## 4.2 Вселенная как огромный жидкий коллапсар

Ещё пример: сама Вселенная. Средняя плотность вещества во Вселенной, по оценкам астрономов, от  $10^{-28}$  до  $10^{-31}$  грамм/см<sup>3</sup>, постоянная Хаббла равна  $H = \frac{c}{a} = (2,3 \pm 0,3) \times 10^{-18}$  сек<sup>-1</sup>, а радиус

\*  $\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 18,6 \times 10^{-28}$  см/грамм — гравитационная постоянная Эйнштейна.

наблюдаемой Вселенной равен  $a = 1,3 \times 10^{28}$  см. На верхней границе расчётной плотности  $\rho_0 = 10^{-28}$  грамм/см<sup>3</sup> радиус коллапса  $r_c$  (4.10) принимает реальные численные значения. Соответственно, согласно наблюдательным оценкам, мы получаем следующие характеристики Вселенной

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ \rho_0 &= 10^{-28} \text{ грамм/см}^3 \\ M &= 9,2 \times 10^{56} \text{ грамм} \\ r_g &= 1,4 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_{br} &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_c &= 1,5 \times 10^{28} \text{ см} \end{aligned} \right\}. \quad (4.16)$$

Это — повод предположить, что Вселенную можно рассматривать как сферу идеальной жидкости, находящуюся в состоянии гравитационного коллапса. Мы будем называть её *жидкостной моделью Вселенной*. В этом случае мы должны иметь  $r_c = r_{br} = r_g = a$  (4.12). Исходя из этого условия и численного значения радиуса Вселенной  $a = 1,3 \times 10^{28}$  см, полученного из постоянной Хаббла, вычисляем массу и плотность, которые должны отнести к Вселенной в рамках настоящей жидкостной модели (согласно  $a = r_g = \frac{2GM}{c^2}$  и  $M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_0$ ). Мы получаем

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ \rho_0 &= 9,6 \times 10^{-31} \text{ грамм/см}^3 \\ M &= 8,8 \times 10^{55} \text{ грамм} \\ r_g &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_{br} &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ r_c &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \end{aligned} \right\}. \quad (4.17)$$

Вычисленные теоретические значения (4.17) сравниваются с оценками наблюдательной астрономии (4.16) в таблице 6.1. Поскольку эти наблюдательные оценки известны очень приблизительно, можно сделать вывод, что наблюдаемая Вселенная представляет собой огромный коллапсар. Поэтому весь наблюдаемый мир, в том числе и мы сами, находится внутри огромной чёрной дыры.

	$M, \text{ г}$	$\rho_0, \text{ г/см}^3$	$a, \text{ см}$	$r_g, \text{ см}$	$r_{br}, \text{ см}$	$r_c, \text{ см}$
Наблюд. значение	$9,2 \times 10^{56}$	$\sim 10^{-28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,4 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,5 \times 10^{28}$
Жидкая модель	$8,8 \times 10^{55}$	$9,6 \times 10^{-31}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$	$1,3 \times 10^{28}$

Таблица 6.1: Модель наблюдаемой Вселенной как невращающейся жидкой сферы в состоянии гравитационного коллапса. Расчётные параметры жидкостной модели сравнены с наблюдаемыми оценками.

Этот вывод совпадает с тем, к которому в 1965 г. пришёл Кирилл Петрович Станюкович [33]. Он не изучал геометрические свойства метрики жидкой сферы. Его анализ основывался на свойствах элементарных частиц. Следуя этому пути, Станюкович получил, что гильбертов радиус Вселенной совпадает с наблюдаемым горизонтом событий: наблюдаемая Вселенная является коллапсаром. Так, несмотря на использование другой теоретической базы, отличной от нашей, он пришёл к такому же заключению.

### 4.3 Давление и плотность внутри жидких коллапсаров

Вычислим давление и плотность внутри невращающихся жидких коллапсаров. Полученная нами формула (2.130) для давления  $p$  внутри сферы, заполненной идеальной жидкостью,

$$p = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}}}{3 \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa \rho_0 r^2}{3}}} \quad (4.18)$$

при условии коллапса  $a = \sqrt{3/\kappa \rho_0}$  принимает простейший вид

$$p = -\rho_0 c^2 = \text{const}, \quad (4.19)$$

где  $\rho_0 = \text{const}$  по определению внутри любой жидкой сферы. Эта формула является *уравнением состояния жидкости*. Такое состояние известно как *инфляция*: при положительной плотности вещества давление изнутри него отрицательно, поэтому внутреннее давление вещества пытается расширить тело изнутри (несмотря на то, что любое жидкое тело несжимаемо).

Как видно из этой формулы, давление внутри невращающегося жидкого коллапсара постоянно, как и плотность. Это означает, что жидкое вещество, заполняющее невращающийся коллапсар, находится в состоянии инфляции и имеет одинаковое давление и плотность по всему объёму коллапсара, от его центра до поверхности.

#### 4.4 Внутренние силы гравитации. Внутреннее красное смещение

Силу гравитации, действующую внутри невращающегося жидкого коллапсара, можно найти из силы гравитации, действующей внутри невращающейся жидкой сферы, если сфера находится в состоянии гравитационного коллапса (в этом случае её физический радиус равен  $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ ).

Таким образом, на основе формул для компонент  $F_1$  (2.123, 2.125) и  $F^1$  (2.124, 2.126) силы гравитации, действующей внутри невращающейся жидкой сферы, мы получаем

$$F_1 = \frac{\kappa\rho_0 c^2 r}{3} \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \frac{c^2 r}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (4.20)$$

$$F^1 = \frac{\kappa\rho_0 c^2 r}{3} = \frac{c^2 r}{a^2}. \quad (4.21)$$

Поскольку  $r < a$  внутри сферы, то  $F_1 > 0$ . Следовательно, это — сила отталкивания. Эта сила возрастает с расстоянием  $r$ , от нуля в центре жидкого коллапсара до своего максимального значения на поверхности.

Если наблюдаемая Вселенная действительно является огромным жидким коллапсаром (об этом свидетельствуют, по крайней мере, астрономические данные, как было показано выше), то радиальная сила отталкивания, действующая внутри коллапсара, может вызвать сдвиг частоты у фотонов. Для исследования этой проблемы рассмотрим х.и.-уравнения изотропных геодезических

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_i c^i + \frac{\omega}{c^2} D_{ik} c^i c^k &= 0 \\ \frac{d(\omega c^i)}{d\tau} + 2\omega (D_k^i + A_k^i) c^k - \omega F^i + \omega \Delta_{nk}^i c^n c^k &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (4.22)$$

которые представляют собой уравнения наблюдаемого движения светоподобной безмассовой частицы (такой как фотон, частота которого  $\omega$ ), движущейся с наблюдаемой скоростью света  $c^i$ . Х.и.-уравнения изотропных геодезических являются наблюдаемыми проекциями общековариантных уравнений изотропных геодезических. Подробнее см. [18, 19].

В пространстве, которое не вращается и не деформируется ( $A_{ik} = 0, D_{ik} = 0$ ), таком как пространство невращающегося жидкого коллапсара, уравнения (4.22) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} - \frac{\omega}{c^2} F_i c^i &= 0 \\ \frac{d(\omega c^i)}{d\tau} - \omega F^i + \omega \Delta_{nk}^i c^n c^k &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (4.23)$$

Пусть фотон движется только в радиальном направлении  $x^1 = r$ . Рассмотрим х.и.-скалярное уравнение геодезических для этого фотона. Подставим полученную формулу для  $F_1$  (4.20). Учтём также, что наблюдаемая скорость фотона есть наблюдаемая скорость света в радиальном направлении,  $c^1 = \frac{dr}{d\tau}$ . В результате х.и.-скалярное уравнение геодезических для фотона принимает вид

$$\frac{1}{\omega} \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{r}{a^2 - r^2} \frac{dr}{d\tau}. \quad (4.24)$$

Это уравнение решается как  $d \ln \omega = -\frac{1}{2} d \ln |a^2 - r^2|$  или

$$d \ln \omega = d \ln \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad (4.25)$$

откуда получаем функцию

$$\omega(r) = \frac{Q}{\sqrt{a^2 - r^2}}, \quad Q = const. \quad (4.26)$$

Постоянная интегрирования  $Q$  находится из очевидного граничного условия  $\omega_{(r=0)} = \omega_0$ . В результате мы получаем  $Q = a^2 \omega_0$ . Наконец, мы приходим к решению

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}}. \quad (4.27)$$

На расстояниях, пройденных фотоном, малых по сравнению с радиусом коллапсара ( $r \ll a$ ), эта формула принимает вид

$$\omega \simeq \omega_0 \left( 1 + \frac{r^2}{2a^2} \right). \quad (4.28)$$

Это вызывает *квадратичное красное смещение* частоты фотона

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} - 1 > 0, \quad (4.29)$$

который мы также называем *параболическим красным смещением* из-за параболической квадратичной функции. То есть сила отталкивания  $F_1$ , действующая вдоль радиальной координаты от наблюдателя, тормозит фотоны, движущиеся внутри звезды к нему. На малых расстояниях пути фотона по сравнению с радиусом жидкой сферы ( $r \ll a$ ) параболическое красное смещение равно

$$z \simeq \frac{r^2}{2a^2}, \quad (4.30)$$

или, выражая этот результат через постоянную Хаббла  $H = \frac{c}{a}$ , параболическое красное смещение равно

$$z \simeq \frac{H^2 r^2}{2c^2}. \quad (4.31)$$

Итак, наблюдаемые параметры Вселенной свидетельствуют о том, что это — огромный коллапсар. Эти данные совпадают с расчётами по представленной здесь теории невращающихся жидких коллапсаров. Поэтому астрономам следует ожидать нелинейного параболического красного смещения на фотонах, приходящих к нам из самых дальних областей Вселенной. Чем больше расстояние, пройденное фотоном, тем больше нелинейность функции красного смещения, которую ожидается зарегистрировать в астрономических наблюдениях.

#### 4.5 Состояние сколлапсировавшего жидкого вещества

Обсудим теперь состояние вещества, заполняющего невращающиеся жидкие коллапсары. Как легко видеть, когда невращающаяся жидкая звезда находится в состоянии гравитационного коллапса

( $r_g = a$ ), метрика пространства звезды (4.7) принимает вид

$$ds^2 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.32)$$

Эта метрика при определённом условии  $a^2 = \frac{3}{\lambda} > 0$  (таким образом,  $\lambda > 0$ ), имеет тот же вид, что и метрика де Ситтера (1.5),

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{\lambda r^2}{3} \right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (4.33)$$

описывающая сферическое распределение физического вакуума ( $\lambda$ -поле в уравнениях поля Эйнштейна).

Это означает, что жидкие коллапсары состоят из идеальной жидкости, состояние которой аналогично состоянию физического вакуума. Разница лишь в том, что жидкость, заполняющая коллапсары, имеет положительную плотность, а плотность физического вакуума отрицательна при  $\lambda > 0$ ; см. подробности в §5.2 и §5.3 нашей книги [18]. Также обычные жидкие коллапсары имеют малый размер и высокую плотность (в отличие от Вселенной в целом). Поэтому жидкость, заполняющая обычные (компактные) коллапсары, находится в состоянии, близком к состоянию физического вакуума высокой плотности.

Что такое физический вакуум, известный также как  $\lambda$ -поле? Понятие физического вакуума ( $\lambda$ -поля) происходит от общей формулировки уравнений поля Эйнштейна

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta}, \quad (4.34)$$

содержащих  $\lambda$ -член в правой части. Правая часть определяет распределённую материю, заполняющую пространство, а левая часть определяет геометрию пространства, которая согласно формулировке является римановой. Перепишем уравнения поля в виде

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa \tilde{T}_{\alpha\beta}, \quad (4.35)$$

где общий тензор энергии-импульса  $\tilde{T}_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta} + \check{T}_{\alpha\beta}$  характеризует как распределённое вещество, так и физический вакуум ( $\lambda$ -поле).

Тензор энергии-импульса физического вакуума

$$\check{T}_{\alpha\beta} = -\frac{\lambda}{\varkappa} g_{\alpha\beta} \quad (4.36)$$

был впервые выведен нами в 1995 году и опубликован в §5.2 и §5.3 книги [18]. Он имеет физически наблюдаемые х.и.-проекции

$$\check{\rho} = \frac{\check{T}_{00}}{g_{00}} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = const < 0, \quad (4.37)$$

$$\check{J}^i = \frac{c\check{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad (4.38)$$

$$\check{U}^{ik} = c^2\check{T}^{ik} = \frac{\lambda}{\varkappa} c^2 h^{ik} = -\check{\rho} c^2 h^{ik}, \quad (4.39)$$

вычисленные тем же способом, что и наблюдаемые х.и.-проекции (1.91) любого тензора энергии-импульса.

Из скалярной х.и.-проекции  $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\varkappa} = const$  следует, что физический вакуум однородно распределён в пространстве, т.е. является *однородной средой*. Векторная х.и.-проекция  $\check{J}^i = 0$  показывает, что физический вакуум не содержит потоков энергии, т.е. является *неизлучающей средой*.

Найдём теперь уравнение состояния физического вакуума. Согласно хронометрически инвариантному формализму, х.и.-тензор напряжений  $U^{ik}$  выражается через давление внутри распределённой среды следующим образом [18, 23]

$$U_{ik} = p_0 h_{ik} - \alpha_{ik} = p h_{ik} - \beta_{ik}, \quad (4.40)$$

где  $p_0$  есть равновесное давление, известное из уравнения состояния,  $p$  есть истинное давление внутри среды,  $\alpha_{ik}$  есть х.и.-тензор вязких напряжений,  $\beta_{ik} = \alpha_{ik} - \frac{1}{3}\alpha h_{ik}$  его анизотропная часть, проявляющаяся в анизотропных деформациях, а  $\alpha = h^{ik}\alpha_{ik}$  след тензора вязких напряжений  $\alpha_{ik}$ . Поскольку сферически-симметричное пространство по определению изотропно, в данном случае мы имеем  $\beta_{ik} = 0$ . Также, по исходному предположению, среда вакуума — невязкая ( $\alpha_{ik} = 0$ ). Поэтому для физического вакуума имеем

$$\check{U}_{ik} = \check{p} h_{ik} = -\check{\rho} c^2 h_{ik}. \quad (4.41)$$

Используя формулу следа тензора напряжений  $U = h^{ik}U_{ik}$ , мы получаем уравнение состояния физического вакуума

$$\check{p} = -\check{\rho}c^2, \quad (4.42)$$

которое, при отрицательной плотности  $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\alpha} < 0$ , является состоянием дефляции (внутреннее давление среды пытается сжать сферу).

Выведем компоненты силы гравитации, действующей внутри вакуумного коллапсара (мы называем его *коллапсар де Ситтера*). Следуя тому же методу вычислений, что и для силы (4.20, 4.21), действующей внутри жидкого коллапсара, мы получаем силу

$$F_1 = \frac{\lambda c^2 r}{3} \frac{1}{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}, \quad F^1 = \frac{\lambda c^2 r}{3}, \quad (4.43)$$

а для частоты  $\omega$  и частотного сдвига  $z$  фотона получаем

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}} \simeq \omega_0 \left( 1 + \frac{\lambda r^2}{6} \right), \quad (4.44)$$

$$z = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\lambda r^2}{3}}} - 1 \simeq \frac{\lambda r^2}{6} > 0. \quad (4.45)$$

Чтобы понять полученные результаты, напомним, что мы смогли преобразовать метрику пространства сколлапсировавшей жидкой сферы (4.32) в метрику пространства де Ситтера (4.33) только с помощью условия  $a^2 = \frac{3}{\lambda} > 0$ . Следовательно, мы приняли  $\lambda > 0$ . При помощи  $\lambda > 0$  мы получили отрицательную плотность физического вакуума  $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\alpha} < 0$  (4.37), состояние инфляции  $\check{p} = -\check{\rho}c^2$  (4.42), силу отталкивания  $F_1 > 0$  (4.43) и квадратичное (параболическое) красное смещение (4.45).

Это — те же результаты, что и для жидкого коллапсара, за исключением отрицательной плотности  $\check{\rho} = -\frac{\lambda}{\alpha} < 0$  (и, следовательно, положительного давления  $\check{p} = -\check{\rho}c^2 > 0$ , создающего состояние дефляции), что создаёт проблему.

Чтобы устранить эту проблему, мы могли бы принять отрицательное значение  $\lambda$ , т.е.  $\lambda < 0$ , чтобы получить положительную плотность физического вакуума. Но если так, то радиус коллапсара  $a$  был бы мнимый, что в наблюдаемой Вселенной нонсенс.

Есть и другой способ устранить эту проблему. Рассмотрим уравнения Эйнштейна (4.34) в виде, где тензор энергии-импульса распределённого вещества и  $\lambda$ -член взяты с одним и тем же знаком

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = -\kappa T_{\alpha\beta} - \lambda g_{\alpha\beta}. \quad (4.46)$$

В этом случае тензор энергии-импульса физического вакуума имеет вид

$$\check{T}_{\alpha\beta} = \frac{\lambda}{\kappa} g_{\alpha\beta}, \quad (4.47)$$

а его физически наблюдаемые х.и.-проекции равны

$$\check{\rho} = \frac{\check{T}_{00}}{g_{00}} = \frac{\lambda}{\kappa} = \text{const} > 0, \quad (4.48)$$

$$\check{j}^i = \frac{c \check{T}_0^i}{\sqrt{g_{00}}} = 0, \quad (4.49)$$

$$\check{U}^{ik} = c^2 \check{T}^{ik} = -\frac{\lambda}{\kappa} c^2 h^{ik} = -\check{\rho} c^2 h^{ik}. \quad (4.50)$$

В этом случае физический вакуум ( $\lambda$ -поле) находится в состоянии инфляции ( $\check{p} = -\check{\rho} c^2$ ), однако его плотность положительна:  $\check{\rho} = \frac{\lambda}{\kappa} > 0$ . Таким образом, модифицированная форма (4.46) уравнений поля Эйнштейна снимает вышеупомянутое противоречие между теорией жидких коллапсаров и наблюдаемой положительной плотностью вещества во Вселенной.

Следовательно, мы получаем, что физический вакуум ( $\lambda$ -поле) представляет собой однородную, невязкую, неизлучающую среду, находящуюся в состоянии инфляции.

Что касается выведенной формулы красного смещения (4.45), то она зависит только от формулы силы отталкивания, которая выводится из  $g_{00}$  метрики де Ситтера (4.33). Поскольку мы не меняли метрику пространства, формула красного смещения (4.45) остаётся неизменной.

#### 4.6 Время течёт в обратном направлении внутри коллапсаров

В пространстве без вращения наблюдаемый интервал времени  $d\tau$  (1.30) имеет упрощённую формулировку:  $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt$ . Следовательно,  $d\tau$  в поле невращающейся жидкой звезды, согласно  $g_{00}$

метрики неврашающейся жидкой сферы (4.6), имеет вид

$$d\tau = \pm \frac{1}{2} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 a^2}{3}} - \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} \right) dt. \quad (4.51)$$

При условии  $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ , характеризующем звезду в состоянии гравитационного коллапса, эта формула принимает вид

$$d\tau = \mp \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} dt. \quad (4.52)$$

Мы видим, что знак наблюдаемого интервала времени  $d\tau$  внутри обычной жидкой звезды противоположен  $d\tau$  внутри жидкой звезды в состоянии гравитационного коллапса. Иными словами, наблюдаемое время внутри обычных звёзд течёт в противоположном направлении, чем наблюдаемое время внутри коллапсаров.

Только один пример: мы обычно предполагаем, что наблюдаемое время течёт из прошлого в будущее. Если это так, то наблюдаемое время внутри коллапсаров течёт из будущего в прошлое.

#### 4.7 Пограничные условия в жидком коллапсаре

При условии  $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ , характеризующем жидкие коллапсары, ненулевые компоненты тензора Римана-Кристоффеля  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  (2.113–2.116), полученные в §2.3, принимают вид

$$R_{0101} = \frac{\kappa\rho_0}{12} = \frac{1}{4a^2} = const, \quad (4.53)$$

$$R_{1212} = -C_{1212} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \frac{r^2}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (4.54)$$

$$R_{1313} = -C_{1313} = \frac{\kappa\rho_0}{3} \frac{r^2 \sin^2\theta}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = \frac{r^2}{a^2} \frac{\sin^2\theta}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (4.55)$$

$$R_{2323} = -C_{2323} = \frac{\kappa\rho_0}{3} r^4 \sin^2\theta = \frac{r^4}{a^2} \sin^2\theta. \quad (4.56)$$

Так как  $R_{0101} = \frac{\kappa\rho_0}{12} = const$  и  $R_{0101} > 0$  при положительной плотности жидкости  $\rho_0 > 0$ , внутреннее пространство жидкого коллап-

сара представляет собой четырёхмерное *пространство положительной постоянной кривизны*. Это противоречит нашему результату §2.3, где мы показали, что пространство обычной жидкой сферы имеет *переменную четырёхмерную кривизну*, которая является *отрицательной*. Это значит, что:

Состояние гравитационного коллапса представляет собой “мост”, соединяющий мир переменной четырёхмерной отрицательной кривизны внутри обычных звёзд и мир четырёхмерной положительной постоянной кривизны внутри тех звёзд, что находятся в состоянии гравитационного коллапса.

Вычислим трёхмерную наблюдаемую кривизну  $C_{11}$  (2.104),  $C_{22}$  (2.105) и скалярную наблюдаемую кривизну  $C = h^{ik}C_{ik}$  пространства внутри невращающегося жидкого коллапсара. При условии  $a = r_g = \sqrt{3/\kappa\rho_0}$ , характеризующем жидкие коллапсары, получаем

$$C_{11} = -\frac{2\kappa\rho_0}{3} \frac{1}{1 - \frac{\kappa\rho_0 r^2}{3}} = -\frac{2}{a^2} \frac{1}{1 - \frac{r^2}{a^2}}, \quad (4.57)$$

$$C_{22} = \frac{C_{33}}{\sin^2\theta} = -\frac{2\kappa\rho_0 r^2}{3} = -\frac{2r^2}{a^2}, \quad (4.58)$$

$$C = -2\kappa\rho_0 = -\frac{6}{a^2} = \text{const} < 0. \quad (4.59)$$

Это — *трёхмерное пространство отрицательной постоянной кривизны* как и пространство обычных жидких звёзд.

Далее мы выражаем силу гравитации, действующую во внутреннем пространстве невращающегося жидкого коллапсара, через трёхмерную наблюдаемую кривизну внутреннего пространства. Из формул для  $F_1$  (4.20) и  $F^1$  (4.21) мы получаем

$$F_1 = -\frac{c^2 r}{2} C_{11}, \quad F^1 = -\frac{c^2}{2r} C_{22}. \quad (4.60)$$

Мы видим, что и трёхмерная наблюдаемая кривизна, и сила гравитации имеют пространственный разрывом

$$C_{11} \rightarrow -\infty, \quad F_1 \rightarrow \infty \quad (4.61)$$

при пограничном условии  $r = a$  на поверхности коллапсара. Однако этот результат тривиален.

### 4.8 Вращающиеся жидкие коллапсары

Вычислим, отличаются ли форма и размер вращающихся жидких коллапсаров по сравнению с формой и размером невращающихся. Эта задача была решена в декабре 2024 года в исследовании вращающихся коллапсаров [34], основанном на введённой тогда же и доказанной с помощью уравнений Эйнштейна метрике вращающегося тела [35]. Здесь мы кратко повторяем эти результаты.

Пусть пространство с метрикой жидкой звезды (4.7) вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг полярной оси коллапсара. Тогда ненулевая компонента

$$g_{03} = -\frac{\omega r^2 \sin^2 \theta}{2c} \left( 3 \sqrt{1 - \frac{r_g}{a}} - \sqrt{1 - \frac{r^2 r_g}{a^3}} \right) \quad (4.62)$$

характеризует это вращение, тогда как  $g_{01} = g_{02} = 0$ . Поэтому линейная скорость вращения пространства  $v_i$  (1.45) равна

$$v_3 = \omega r^2 \sin^2 \theta, \quad v_1 = v_2 = 0. \quad (4.63)$$

В результате получаем метрику пространства *на поверхности* вращающегося жидкого коллапсара (его радиус  $a$  отличается от его гравитационного радиуса, т.е.  $r = a \neq r_g$ , из-за его вращения)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta \sqrt{1 - \frac{r_g}{r}} dt d\phi - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.64)$$

Эта метрика аналогична метрике Шварцшильда для пространства точечной массы (1.1), но с дополнительным членом, описывающем вращение пространства. Это неудивительно, так как метрика пространства жидкой сферы совпадает с метрикой точечной массы на поверхности сферы и вне её (по этой причине метрику точечной массы иногда называют *внешней метрикой жидкой сферы*).

Общее условие гравитационного коллапса означает, что физическое наблюдаемое время останавливается ( $d\tau = 0$ ), т.е.

$$d\tau = \sqrt{g_{00}} dt + \frac{g_{0i}}{c \sqrt{g_{00}}} dx^i = \left(1 - \frac{w}{c^2}\right) dt - \frac{1}{c^2} v_i dx^i = 0, \quad (4.65)$$

что учитывает как  $g_{00}$ , так и  $g_{0i}$ . Следовательно, при  $v_i \neq 0$  условие коллапса не  $d\tau = \sqrt{g_{00}} dt = 0$  как для невращающихся коллапсаров, а имеет полный вид

$$\sqrt{g_{00}} - \frac{1}{c^2} v_3 u^3 = 0, \quad (4.66)$$

где  $u^3 = \frac{d\phi}{dt} = \omega$ . Подставляя выражение для  $g_{00}$ , взятое из метрики (4.64), а также  $v_3$  (4.63) и  $u^3 = \omega$ , получаем радиус поверхности коллапса вращающегося жидкого коллапсара

$$r_c = \frac{r_g}{1 - \frac{\omega^4 r^4 \sin^4 \theta}{c^4}} \geq r_g, \quad (4.67)$$

следовательно

$$r_c \simeq r_g \left( 1 + \frac{\omega^4 r^4 \sin^4 \theta}{c^4} \right) = r_g + \Delta r_g. \quad (4.68)$$

Полагая, например,  $\omega = 10^3 \text{ сек}^{-1}$  и  $r = a = 10^6 \text{ см}$ , мы получаем  $\Delta r_g \simeq 1.2 \times 10^{-6} r_g \sin^4 \theta \simeq 1.2 \text{ см}$  на экваторе звезды, тогда как  $\Delta r_g = 0$  на Южном и Северном полюсах.

Мы видим, что поверхность коллапса совпадает с радиусом  $a$  звезды только на полюсах вращения звезды, где полярный угол равен  $\theta = 0$  и, поэтому,  $\sin \theta = 0$ . Другими словами, вращающиеся жидкие коллапсары не являются сферами, а имеют *эллиптическую форму*, утолщенную в экваториальной плоскости (ортогональной оси вращения).

Если коллапсар не вращается ( $\omega = 0$ ), его форма сферически-симметрична ( $r_c = a = r_g$ ). Наоборот, при предельной релятивистской скорости вращения эллиптическая форма коллапсара утолщена в экваториальной плоскости: когда коллапсар вращается со скоростью, очень близкой к скорости света ( $\omega a \rightarrow c$ ), его форма задаётся уравнением

$$r_c = \frac{r_g}{1 - \sin^4 \theta} \simeq r_g (1 + \sin^4 \theta). \quad (4.69)$$

Эти результаты для вращающихся жидких коллапсаров полностью совпадают с результатами, полученными для вращающихся коллапсаров с метрикой точечной массы [34] из-за идентичности метрик пространства на их поверхности и их внешних метрик.

## 4.9 Заключение

Наконец, напомним все теоретические результаты касающиеся жидких коллапсаров, полученные нами выше:

1. Радиальная координата  $r_c$  (4.10), на которой невращающаяся жидкая сфера радиуса  $a$  приходит к состоянию гравитационного коллапса, равна

$$r_c = \sqrt{9a^2 - \frac{8a^3}{r_g}}. \quad (4.70)$$

Для обычных звёзд  $r_c$  принимает мнимые числовые значения. Таким образом, обычные звёзды пребывают в состоянии вне коллапса;

2. В силу требования, чтобы радиус коллапса  $r_c$  был реальным для реальных объектов, физический радиус невращающегося жидкого коллапсара  $a$  должен быть равен

$$a \leq 1,125 r_g. \quad (4.71)$$

Если невращающаяся жидкая звезда имеет радиус  $a \geq 1,125 r_g$ , то она не может находиться в состоянии гравитационного коллапса;

3. Плотность вещества является основной характеристикой невращающихся жидких коллапсаров. Физический радиус  $a$  такого коллапсара обратно пропорционален квадратному корню из его плотности  $\rho_0$  (4.13)

$$a = \sqrt{\frac{3}{\kappa \rho_0}} = \frac{4,0 \times 10^{13}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ см}; \quad (4.72)$$

4. Масса  $M$  невращающегося жидкого коллапсара пропорциональна его физическому радиусу  $a$  (4.14)

$$M = \frac{4\pi a}{\kappa} = 6,8 \times 10^{27} a \text{ грамм}, \quad (4.73)$$

и обратно пропорциональна квадратному корню из его плотности  $\rho_0$  (4.15)

$$M = \frac{4\sqrt{3}\pi}{\kappa^{3/2}\sqrt{\rho_0}} = \frac{2,7 \times 10^{41}}{\sqrt{\rho_0}} \text{ грамм}; \quad (4.74)$$

5. Наблюдаемая Вселенная полностью находится внутри своего радиуса коллапса. Другими словами, Вселенная — гравитационный коллапсар: все звёзды и галактики, включая нас самих, существуют внутри огромной чёрной дыры. Её параметры, рассчитанные по жидкостной модели, равны

$$\left. \begin{aligned} a &= 1,3 \times 10^{28} \text{ см} \\ \rho_0 &= 9,6 \times 10^{-31} \text{ грамм/см}^3 \\ M &= 8,8 \times 10^{55} \text{ грамм} \end{aligned} \right\}; \quad (4.75)$$

6. Жидкость, заполняющая коллапсары, находится в состоянии инфляции

$$p = -\rho_0 c^2 = \text{const}, \quad (4.76)$$

т.е. при положительной плотности вещества давление отрицательно, поэтому внутреннее давление пытается расширить тело изнутри (но коллапсар не расширяется, так как жидкое тело несжимаемо). Давление и плотность остаются неизменными от центра коллапсара до его поверхности;

7. Гравитационно-инерциальная сила, действующая внутри невращающегося жидкого коллапсара, — это сила отталкивания. Она увеличивается с расстоянием от нуля в центре коллапсара до предельно высокого значения на поверхности;
8. Внутренняя сила отталкивания вызывает квадратичное (параболическое) красное смещение фотонов, движущихся внутри коллапсара;
9. Состояние жидкого вещества, заполняющего обычные (компактные) коллапсары, аналогично состоянию физического вакуума высокой плотности ( $\lambda$ -поля высокой плотности), который представляет собой однородную вязкую неизлучающую среду в состоянии инфляции;
10. Наблюдаемое время течёт в противоположных направлениях внутри и снаружи коллапсаров: если принять, что наблюдаемое время нашего мира течёт из прошлого в будущее, то наблюдаемое время внутри коллапсаров течёт из будущего в прошлое;
11. Состояние гравитационного коллапса представляет собой “мост”, соединяющий мир переменной четырёхмерной отри-

цательной кривизны внутри обычных звёзд и мир четырёхмерной положительной постоянной кривизны внутри гравитационных коллапсаров (чёрных дыр);

12. Вращающиеся жидкие коллапсары не являются сферами, а имеют *эллиптическую форму*, утолщённую в экваториальной плоскости (где  $\sin \theta = 1$ ). Радиус  $r_c$  вращающегося жидкого коллапсара формулируется через его гравитационный радиус  $r_g$ , радиус сферы  $r = a$ , широту  $\theta$  и угловую скорость её вращения  $\omega$  в виде

$$r_c = \frac{r_g}{1 - \frac{\omega^4 r^4 \sin^4 \theta}{c^4}} \simeq r_g \left( 1 + \frac{\omega^4 r^4 \sin^4 \theta}{c^4} \right) =$$

$$\simeq r_g + \Delta r_g \geq r_g. \quad (4.77)$$


---

## Литература

1. Eddington A. S. The Internal Constitution of the Stars. Cambridge University Press, Cambridge, 1926.  
Краткое изложение на русском опубликовано в статье: Эддингтон А. Внутреннее строение звёзд. *Успехи физических наук*, 1924, том 4, № 1, 11–28.
2. Bethe H. A. Energy production in stars. *Physical Review*, 1939, vol. 55, no. 5, 434–456.
3. Milne E. A. The analysis of stellar structure. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1930, vol. 91, no. 1, 4–55.
4. Козырев Н. А. Источники звёздной энергии и теория внутреннего строения звёзд. Часть I. *Известия Крымской астрофизической обсерватории*, 1948, том 2, 3–43; Часть II, *ibid.*, 1951, том 6, 54–83.  
English translation: Kozyrev N. A. Sources of stellar energy and the theory of the internal constitution of stars. *Progress in Physics*, 2005, vol. 1, no. 3, 61–99.
5. Jeans J. H. Recent developments of cosmical physics. *Nature*, December 4, 1926, vol. 118, no. 2979, 29–40 (in the *Supplement* to the issue).
6. Jeans J. H. *Astronomy and Cosmogony*. Cambridge University Press, Cambridge, 1928.
7. Robitaille P.-M. A high temperature liquid plasma model of the Sun. *Progress in Physics*, 2007, vol. 3, no. 1, 70–81.
8. Robitaille P.-M. A thermodynamic history of the solar constitution — I: the journey to a gaseous sun. *Progress in Physics*, 2011, vol. 7, no. 3, 3–25.
9. Robitaille P.-M. A thermodynamic history of the solar constitution — II: the theory of a gaseous sun and Jeans' failed liquid alternative. *Progress in Physics*, 2011, vol. 7, no. 3, 41–59.
10. Robitaille P.-M. Forty lines of evidence for condensed matter — the Sun on trial: liquid metallic hydrogen as a Solar building block. *Progress in Physics*, 2013, vol. 9, no. 4, 90–142.
11. Borissova L. The gravitational field of a condensed matter model of the Sun: the space breaking meets the Asteroid strip. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2009, vol. 2, 224–260.

12. Borissova L. The Solar System according to General Relativity: the Sun's space breaking meets the Asteroid strip. *Progress in Physics*, 2010, vol. 6, no. 2, 43–47.
13. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, 189–196.  
English translation: Schwarzschild K. On the gravitational field of a point mass according to Einstein's theory. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 10–19.
14. Schwarzschild K. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus incompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1916, 424–435.  
English translation: Schwarzschild K. On the gravitational field of a sphere of incompressible liquid, according to Einstein's theory. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 20–32.
15. Hilbert D. Die Grundlagen der Physik. *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 1917, 53–76.
16. De Sitter W. On the curvature of space. *Koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen, Proceedings*, 1918, vol. XX, part I, no. 2, 229–243.
17. Borissova L. De Sitter bubble as a model of the observable Universe. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2010, vol. 3, 3–24.
18. Борисова Л. и Рабунский Д. Поля, вакуум и зеркальная вселенная. Перевод с 3-го, переработанного английского издания, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.  
Издания на русском языке опубликованы в 1999, 2010, 2023; на английском — в 2001, 2009, 2023; на французском — в 2010, 2023.  
Оригинальное издание: Borissova L. and Rabounski D. *Fields, Vacuum, and the Mirror Universe*. The 3rd revised edition, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.  
Перевод на французский: Rabounski D. et Borissova L. *Champs, vide, et Univers miroir*. La 2ème édition révisée, *New Scientific Frontiers*, Londres, 2023.
19. Рабунский Д. и Борисова Л. Частицы здесь и за зеркалом. Перевод с 4-го, переработанного английского издания, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.  
Издания на английском опубликованы в 2001, 2008, 2012, 2023; на французском — в 2010, 2023.  
Оригинальное издание: Rabounski D and Borissova L. *Particles Here and Beyond the Mirror*. The 4th revised edition, *New Scientific Frontiers*, London, 2023.

- Перевод на французский: Rabounski D. et Borissova L. Particules de l'Univers et au delà du miroir. La 2ème édition révisée, New Scientific Frontiers, Londres, 2023.
20. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Теория поля. Гос. изд-во теоретико-технической литературы, Москва, 1939 (ссылки на разделы даны из последнего 6-го русского издания, вдвое расширенного по сравнению с 1-м изданием, Наука, Москва, 1973).  
English translation: Landau L. D. and Lifshitz E. M. The Classical Theory of Fields. Pergamon Press, Oxford, 1951 (section references are given from the final 4th English edition, expanded twicely from the 1st edition, Butterworth-Heinemann, 1979).
  21. Зельманов А. Л. Хронометрические инварианты. Канд. диссертация 1944 года. American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2006.  
English translation: Zelmanov A. L. Chronometric Invariants. Translated from the 1944 PhD thesis, American Research Press, Rehoboth, New Mexico, 2006.
  22. Зельманов А. Л. Хронометрические инварианты и сопутствующие системы отсчёта в общей теории относительности. *Доклады АН СССР*, 1956, том 107, № 6, 815–818.  
English translation: Zelmanov A. L. Chronometric invariants and accompanying frames of reference in the General Theory of Relativity. *Soviet Physics Doklady*, 1956, vol. 1, 227–230.
  23. Зельманов А. Л. К релятивистской теории анизотропной неоднородной вселенной. В сб.: *Труды 6-го совещания по вопросам космогонии*, проходившего в 1957 г., Изд-во АН СССР, Москва, 1959, 144–174.  
English translation: Zelmanov A. L. On the relativistic theory of an anisotropic inhomogeneous universe. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 33–63.
  24. Hafele J. C. Relativistic behaviour of moving terrestrial clocks. *Nature*, July 18, 1970, vol. 227, 270–271.
  25. Hafele J. Performance and results of portable clocks in aircraft. PTTI 3rd Annual Meeting, November 16–18, 1971, 261–288.
  26. Hafele J. C. Relativistic time for terrestrial circumnavigations. *American Journal of Physics*, 1972, vol. 40, 81–85.
  27. Hafele J. and Keating R. Around the world atomic clocks: predicted relativistic time gains. *Science*, July 14, 1972, vol. 177, 166–168.
  28. Hafele J. and Keating R. Around the world atomic clocks: observed relativistic time gains. *Science*, July 14, 1972, vol. 177, 168–170.
  29. Demonstrating relativity by flying atomic clocks. *Metromnia*, the UK's National Measurement Laboratory Newsletter, issue 18, Spring 2005.

30. Schouten J. A. und Struik D. J. Einführung in die neuen Methoden der Differentialgeometrie. Noordhoff, Groningen, 1938.  
First published in *Zentralblatt für Mathematik*, 1935, Bd. 11 und Bd. 19.
  31. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд-во иностранной литературы, Москва, 1951.  
Оригинальное издание: Kamke E. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen. Gewöhnliche Differentialgleichungen*, S. Hirzel Verlag, Leipzig 1942.
  32. Hessels J. W. T., Ransom S. M., Stairs I. H., Freire P. C., Kaspi V. M., Camilo F. A radio pulsar spinning at 716 Hz. *Science*, March 31, 2006, vol. 311, no. 5769, 1901–1904.
  33. Станюкович К. П. К вопросу о существовании устойчивых частиц в метагалактике. В сб.: *Проблемы теории гравитации и элементарных частиц*, выпуск 1, Атомиздат, Москва, 1966, 267–279.  
English translation: Stanyukovich K. On the problem of the existence of stable particles in the Metagalaxy. *The Abraham Zelmanov Journal*, 2008, vol. 1, 99–110.
  34. Rabounski D. Correct solutions for rotating black holes. *Progress in Physics*, 2025, vol. 21, no. 1, 3–9.
  35. Rabounski D. Introducing the space metric of a rotating massive body and four new effects of General Relativity. *Progress in Physics*, 2024, vol. 20, no. 2, 79–99.
-

Изображение на обложке: фотография Солнца, сделанная SDO/NASA. Представлено SDO/NASA и научными группами AIA, EVE и HMI. Изображения и фильмы SDO не защищены авторским правом, если не указано иное: использование изображений SDO в некоммерческих целях, а также в образовательных и информационных целях настоятельно рекомендуется и не требует явного разрешения. Подробнее см. <http://sdo.gsfc.nasa.gov/data/rules.php>

Изображение на титульном листе: загадочная гравюра на дереве неизвестного средневекового художника. Её называют *гравюра Фламмариона*, так как она воспроизведена на стр. 163 книги Камилла Фламмариона *L'Atmosphère: Météorologie populaire* (Париж, 1888 г.), излагающей метеорологию для широкой аудитории. На этой гравюре по дереву изображён человек, вглядывающийся сквозь атмосферу Земли, как если бы это был занавес, позволяющий заглянуть внутрь Вселенной. Подпись к гравюре гласит: “Un Missionnaire du moyen âge raconte qu’il avait trouvé le point où le ciel et la Terre se touchent. . .”, что переводится как “Средневековый миссионер рассказывает, что он нашел точку, где встречаются небеса [в смысле “небо”] и Земля. . .”

Формат книги: 60 × 90 1/16  
Гарнитура: Tempora TLF  
Основной кегль: 11 пт

# Внутри звёзд

Теория внутреннего строения звёзд  
и источников звёздной энергии  
на основе общей теории относительности

Л. Борисова и Д. Рабунский

Второе, исправленное издание на русском  
языке, переведённое с 4-го, исправленного  
английского издания

New Scientific Frontiers  
London, 2025

